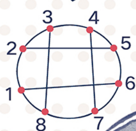
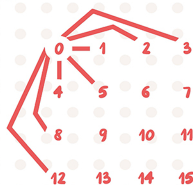
TURING 图灵新知

红发克拉拉的数学奇想









[西]克拉拉·格里玛 著
[西]拉蔻儿·GU 绘
劳佳 译



	1	3	
2			
			3
	2	1	

中国工信出版集团
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

克拉拉·格里玛（Clara Grima）

西班牙塞维利亚大学数学博士、应用数学系教授，畅销数学科普书作家，全欧洲播放的科普电视栏目的主持人，目前担任西班牙皇家数学学会传播委员会主席。曾荣获2018年科学在行动奖（科学奖）和“棱镜奖”评委会特别奖，2017年西班牙科学协会科学传播奖和加泰罗尼亚大学女性科学家奖，博客作品《马蒂和她的20个数学故事》获得2011年西班牙最佳博客奖。

拉蔻儿·GU（Raquel GU）

西班牙插画家。

数字版权声明



图灵新知

红发克拉拉的数学奇想

[西] 克拉拉·格里玛　著
[西] 拉蔻儿·GU　绘
劳　佳　译

人民邮电出版社
北　京

图书在版编目（CIP）数据

红发克拉拉的数学奇想 / (西) 克拉拉 . 格里玛 (Clara Grima) 著 ; (西) 拉蔻儿 . GU (Raquel GU) 绘 ; 劳佳译. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2020.7
（图灵新知）
ISBN 978-7-115-53966-3

Ⅰ. ①红… Ⅱ. ①克… ②拉… ③劳… Ⅲ. ①数学－普及读物 Ⅳ. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第077946号

内 容 提 要

本书通过 50 个生活话题展现了数学知识和思维方法。作者在各个学科、日常生活和时事新闻中寻找数学的身影，从简单的问题中提炼出代数、几何、图论、数论的知识，以生动而清晰的方式讲述了数学故事，揭示了生活中无处不在的数学原理和意想不到的趣题，告诉大家如何通过数学理解、解决一些日常现实问题。本书适合喜爱数学和科学知识的各年龄层读者阅读。

◆ 著　[西] 克拉拉 · 格里玛
绘　[西] 拉蔻儿 · GU
译　劳 佳
责任编辑　戴 童
责任印制　周昇亮

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　https://www.ptpress.com.cn
北京　印刷

◆ 开本：880×1230　1/32
印张：7.375
字数：177千字　2020年 7 月第 1 版
印数：1 – 2 500册　2020年 7 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2018-5946号

定价：69.00元

读者服务热线：(010)51095183转600　印装质量热线：(010)81055316

反盗版热线：(010)81055315

广告经营许可证：京东市监广登字 20170147 号

版权声明

拥有科学的思想已是向前迈了一步。关于“成就”的记忆会告诉我们，有些事情是可能的；如果有成功的希望，勇气还会让我们加倍努力。

——苏菲·姬曼

致我的儿子们，萨尔瓦多和本图拉。

每当我看着他们，思考我有多爱他们时，我就会明白什么是无限。

数学，我的爱

我是个女数学家，我喜欢当个女数学家。我知道，有些人可能看不出这有什么意思，并且觉得写下这些话的人是一个少见的不合群的家伙，天生就会心算，眼睛骨碌一转就能激活神经元，启动代数算法。不不，我根本不是这样。好吧，我不知道我是不是个罕见的家伙，我觉得自己相对正常，非常“正态”[①]。对不起，我忍不住开了个数学玩笑，但这些文字简直是拦也拦不住。

经常有人问我为什么选择学习数学。是有某位老师给了我特别的启发？或者我是个计算能力超强的神童？还是我一直都想要当数学家？这些问题的答案都是否定的：当我还是个孩子的时候，我想要开个小商店卖按扣——许许多多、大大小小、五颜六色的按扣，因为那时的我喜欢把它们从硬纸板上掰下来时的声音。要么卖按扣，要么当歌手——西班牙民谣的歌手。我把家里所有花瓶里的塑料花都戴在头发上，深情款款地唱着西班牙民谣，非常夸张。十几岁时，我想成为麦当娜，这是我的梦想。不幸的是（或许幸运的是），老天并没有给我多少音乐天分，我不得不选择另一条路。

但为什么是数学呢？我这个人说到底就是懒。我不喜欢背别人随心所欲给河流、动物或植物起的那些名字。相比之下，数学是一种游戏，只要了解规则就可以玩了。数学需要去发现！这一点激动人心。我还记得第一次解出线性方程（一阶线性方程，比如 $x+3=5$）的时候，我高兴地尖叫起来。我能够发现数学的秘密！一切都合乎逻辑，数学就是它应有的样子，不依赖人们的心血来潮，它是，并且永远都是那样子。数学是永恒的。哪怕国界或城市的名字会改变，但是 7 将永远是一个素数，而这就是它强大和精彩之处。

---

① 在统计学中，正态分布是为自然现象建模最常用的概率分布之一，也叫作高斯分布。

因此，当我选择在大学学什么的时候，对我来说几乎一切都明明白白。我在数学和哲学之间犹豫不决了几个月，这两样都很吸引我，这两样都让我思索。是我的哲学教授安东尼奥·乌尔塔多帮我做了决定："你在大学里学数学，业余时间看哲学书，人总得有饭吃。"我的教授不幸言中，因为在当时（恐怕今天也是），哲学是一门没太多职业前途的学科。而且，安东尼奥的建议是我这辈子得到的最好的建议之一，不仅是因为我毕业之后一直有工作，更是因为数学塑造了我的生活，而我生活得不错。数学在过去和现在都让我幸福。

我在西班牙塞维利亚大学开始学习数学，我发现了"数学"这个词的真正含义。我疯狂地爱上了这个知识分支，并且（并非毫不费力地）完成了学业。虽说数学不容易，但它非常激动人心，没有什么比这更令人着迷了。学业结束后，我开始在阿尔贝托·马克斯的指导下攻读计算几何学博士学位。是的，从那以后，我把我的心和所有的爱都投入到了这种通过数学观察生活的方式。

在 1995 年 11 月阳光灿烂的一天，我开始在塞维利亚大学应用数学系任教。我很快发现，做研究带来的满足感与讲述和教授你所发现的东西完全不能相提并论。十多年里，数学仅限于在大学课堂和大会报告中。随着孩子们的出生，我发现自己面临新的挑战：不是在课堂上，而是在客厅地毯上讲授这一切。

我的小儿子本图拉当时 6 岁，问我 T 恤衫上画的是什么。

"妈妈，这是桌子还是球门？"

"这是一个数，本图拉，它叫作 π（pi）。"

他惊讶又怀疑地看着我——孩子们就是这样子，他们也应该是这样子。

"这是个 3 和 4 之间的数。"我补充道。

“妈妈，3 到 4 之间没有数。3，然后就是 4。”

“嗯……事实上，3 和 4 之间有数，有无穷多个数。”

“妈妈，无穷多是多少？”我 8 岁的大儿子也加入了讨论。

因为我从来都天不怕地不怕，而且我喜欢他们的问题，所以我试图编一个故事来向他们尽量解释这些概念。我对他们说，数 π 用于测量圆周，如果没有它，就无法测量圆周长。说到无穷多，这是一个只存在于我们脑海里的东西，不管数多久也达不到。总而言之，他们总结出了两件事。

“啊，我明白了！这就是为什么比萨饼被称为‘pi-zza’，因为它们是圆的。”

“无穷是数学家为了让自己休息一下发明出来的。”

这是我的科普生涯的“大爆炸”时刻。在拉蔻儿（本书的插画作者）的画笔和水彩的帮助下，我们开了个博客“玛蒂和她的数学冒险”（Mati y sus mateaventuras），里面充满了数学的故事，或者说，伪装成故事的数学。

我们的博客主要面向家庭，时至今日，我们仍然会对它在中小学教师之中的受欢迎程度感到惊讶。不仅仅是教师，还有本来自认为不喜欢数学的人也写信告诉我们，说数学这样看起来很美。

数学是美的，这不能归功于我们，因为它本身就是美的。我们所做的无非是用故事把数学放在一个情景中。即使在今天，许多人仍然将数学与计算，比如除法或开方联系在一起，但这不是数学的全部。正如我所说的，数学是一个游戏，一个精彩而强大的游戏：它就是它应有的样子。数学是描述我们的世界的语言，是一种既合乎逻辑又优雅的推理方式，是了解我们这个宇宙的途径。

从 2011 年 5 月 14 日起，我将自己的一部分时间用于为 9 至 99 岁的“孩子”们科普。我知道每个人都喜欢数学，但有些人自己还不知道。

你其实喜欢数学——这就是本书想要证明的。如果你已经知道了，我希望你在日常生活中享受这场旅途，在你所做的一切事情中和数学相遇，从系鞋带到你最满意的自拍，从拍卖、缝纫机、电视剧《权力的游戏》到谷歌搜索引擎……如果你是那些自认为不喜欢数学的人之一，让我来说服你：你所做的一切都充满了数学，而且它引人入胜。如果我成功地说服了你，我会要求你做一件小事：到街上去大声说你喜欢数学，用尽全力。不幸的是，即使在科技无处不在的 21 世纪，还有人（手里拿着手机）在唱反调，坚称数学毫无用处。无论是哪个国家，蔓延在空气中的这种情绪都会阻碍通向未来的车轮，因为未来是用数学写就的。数学家爱德华·弗伦克尔有一句话，很短却很能说明问题：“权力握在一小批精英手中。如果他们有权力，那是因为他们懂数学，而你却不懂。”就像另一位数学家塞德里克·维拉尼所说：“确保人们认识和理解数学，应该成为国家的优先事项。”

找个舒服的姿势，放松下来，随我们踏上这场旅程，一起巡视你的日常生活吧。你不想躲在阴暗的角落里，对吧？愿数学与你同在！

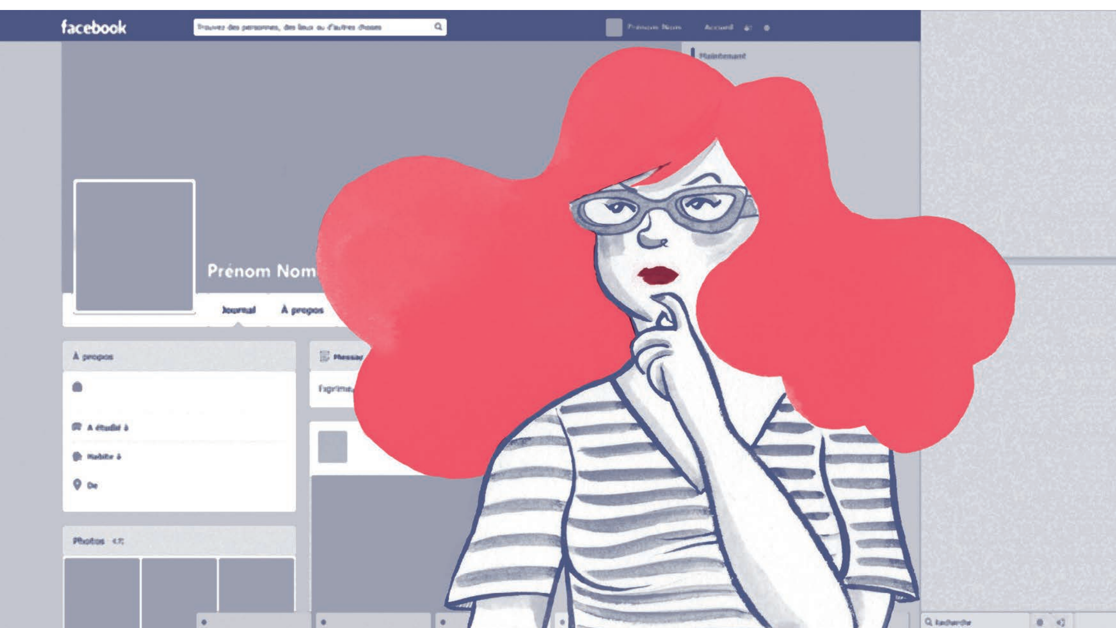
目　录

1 小心！你的社交网络主页在欺骗你！

和所有社交网络的用户一样，你有时会对选举的结果感到惊讶。根据你在投票主页或时间线上看到的内容，你觉得大多数人投的票和你一样。然而并非如此。你被一种错觉欺骗了：多数错觉。

在我们的社交网络环境中，一个人绝不（或几乎不）应该信任那些看似主流的潮流——不管涉及什么东西。除了它的许多优点和应用之外，社交网络还具有某些属性，这些属性可能会诱使我们遭到欺骗，或违背我们所说的“直觉”。

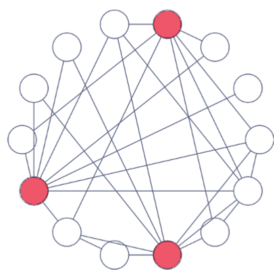
让我们来看看其中一种网络行为吧，比如“陌生人”：有一个出名的“友谊悖论”，它确保了你的朋友们平均拥有的朋友比你更多。虽然这乍一看有点自相矛盾，但只要稍加分析就可以理解为什么会发生这种情况：你的朋友中只要有一个人“非常受欢迎”就足够了，他的朋友非常多，导致他的朋友的平均朋友数也大幅飙升，相比较而言，你感觉自己是个毫不起眼的可怜人。



冷静冷静，不要有压力：在这种类型的社会实验中使用平均值既不公平也不客观，这就像用同一个标准（平均值）来衡量一批人的平均工资，而这批人里面有欧洲首富——时装品牌 Zara 的创始人阿曼西奥·奥尔特加，还有几个拿助学金的学生。这里的问题就在于不加思考地使用平均值。

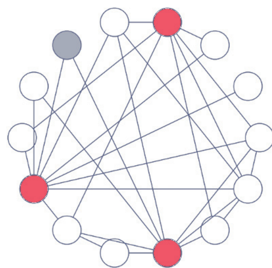
社交网络还有一个被称为“陌生人”的行为，即多数错觉。美国南加利福尼亚大学的研究人员最近对它做了研究。从某种意义上说，正如我们将要看到的那样，它与“友谊悖论”密切相关。不过首先还是让我们来解释一下。

什么是多数错觉？

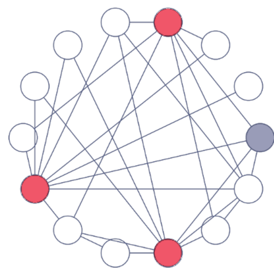


简而言之，这种现象导致社会环境中看似出现了一种奇怪的行为。为了说明这种现象，南加利福尼亚大学的克里斯蒂娜·勒曼和她的同事用一个只有 14 个用户的社交网络，设计了一个相当简单但非常能够说明问题的例子。在左图中，每个点都代表 1 个社交网络用户，其网络中的好友用线连起来。在所有这些朋友中，只有 3 个被涂成了红色。

如果图中的这 3 个红色的顶点表示用户有某种特定行为，那么说它是网络中的惯例就是不合逻辑的，因为在 14 个用户中只有 3 个用户有这种行为，不到总人数的 22%。我没说错吧？但是请注意，如果我们随便找一个白色用户，问问他们在网络中看到了什么，我们会发现：



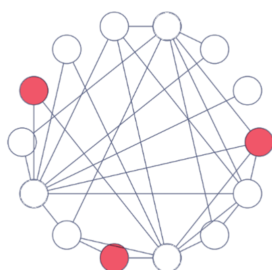
右上图中涂成蓝色的用户观察到他的朋友 100% 都是红色的，从而推断出红色才是正常的。整体而言，如果我们询问 11 个白色用户中的任何一个，他都会告诉我们，其社交网络中超过 50% 的朋友是红色的。



如果我们选择另一个蓝色顶点（如左图所示），他会告诉我们其 75% 的朋友是红色的。

也就是说，在不到 22% 的用户是红色的情况下，超过 78% 的人（14 个用户中的 11 个）会告诉我们，红色才是常态。这就是勒曼和她的同事所说的“多数错觉”。比如，这就可以解释为什么（在某些环境中）排外、

大男子主义等行为被视为正常的，因为网络中的一些成员（不到总人数的 22%）就是这样的人。但这总是会发生吗？也就是说，如果我们换 3 个网络用户，把它们涂成红色，还会是这样吗？答案是否定的，在勒曼的研究中，右图说明了这一点。



在第二个例子中，白色用户会看到白色才是常态，这才更接近现实，也就是说这种多数错觉没有出现。为什么呢？好吧，从某种意义上讲，这是出于和友谊悖论一样的原因，有很多朋友或“粉丝”的用户会造成奇怪的效果：勒曼的第一个例子里选出的 3 个红色用户非常受欢迎（称为“影响者”），而第二个例子则不是。

这种现象也可以解释为什么某些内容会通过网络病毒式传播，而另一些内容对于大众来说可能更有趣、更有意义，却默默无闻地消失了。只要第一类内容是有许多“粉丝”的用户发布的，就足以引发多数错觉了。

同样地，就像我们前面说过的，这种现象可以导致我们对某些潮流得出错误的结论，或将远非常态的行为视作正常的。当然，这说的都是不好的方面。好的一面是，找到联结最广的用户，我们就可以传播积极的内容。

因此，不要总是相信自己社交网络中那些“影响者”的话。而如果您是“影响者”之一，请负起责任，不要传播那些可能对社区构成危险的信息。

2　贝济埃曲线：毕加索的画作背后有什么科学？

如果你想知道答案，扶稳了，答案是曲线，具体来说，是贝济埃曲线（Bézier curve）。



毕加索、汽车和数学有什么共同点？合理的答案可能是“根本没有”。然而，这三者之间有一种相当奇特的关系，可以套用有人否认毕加索画作有任何优点时常说的一句话：“是人都能画出来，连小孩子都能。”那就找个孩子来吧，就像美国电影演员格劳乔·马克斯说的那样。

我不仅要在这里反驳这种无知，而且我还要更进一步：毕加索的一些绘画如此简单，连数学家都能画出来。没话说了吧！事实上，这位西班牙马拉加绘画巨子的大部分画作仅用贝济埃曲线就可以重现，你肯定看到和使用过这个数学对象，即使你并没有意识到。

贝济埃曲线由法国工程师皮埃尔·贝济埃开发，他曾在法国雪铁龙和雷诺公司工作。在 20 世纪 60 年代早期，他开发了这一工具并广泛用于汽车零件的设计，后来也用于航空业。今天，几乎所有与图形有关的计算机程序里都有这种工具。

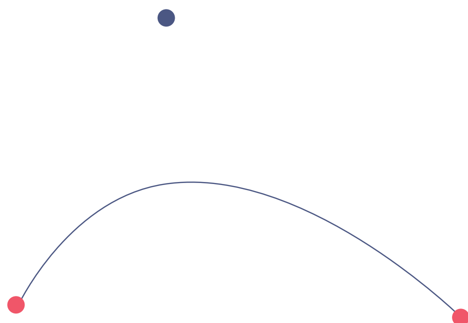
我们说的就是那个画曲线的工具，它画出来的从来就不是我们想的那个样子。好吧，起始点和终止点还行，但中间的部分总是给我们带来“惊喜”，有时甚至让人发飙。你也遇上过吧？我们现在就来试着了解一下这一工具是如何工作的，以及贝济埃曲线是怎么画出来的，这样下次就不会措手不及。

贝济埃曲线总是依照 3 个或 3 个以上的点，即所谓的“控制点”绘制而成。我们应该把它们想象成描述一个物体运动的路径，它从第一个点走到最后一个点，但会被中间的点“吸引”。

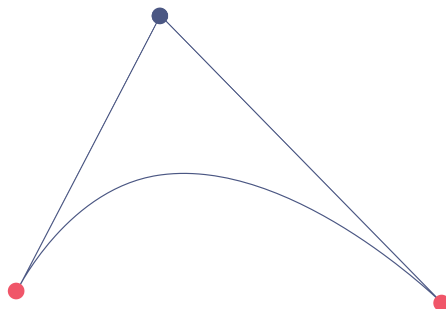
虽然大多数软件中使用的是 4 个控制点，但我认为我们应该从仅使用 3 个控制点的曲线开始。打开一个你喜欢的绘图软件，选择（贝济埃）曲线工具，用鼠标单击一个点，拖动到另一个点并放开，这样就创建了第二个控制点。现在移动到第三个点，双击完成曲线绘制。我们的 3 个点如下所示。



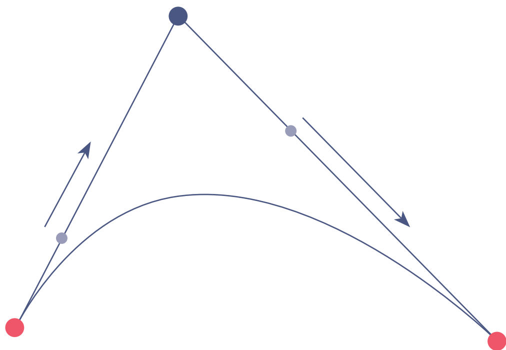
但出乎意料的是，程序绘制了如下的曲线。



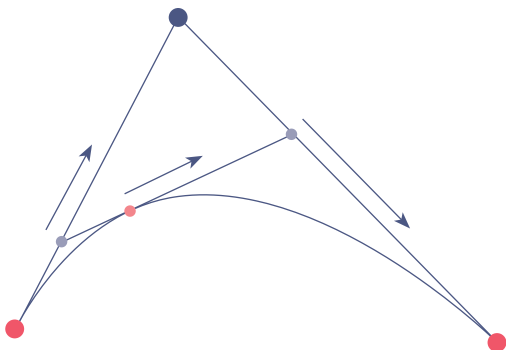
但这是为什么呢？为了理解它，我们像下面这样：用一条线把最左边的点（红色）连到中间的点（蓝色），再连到最后一个点（红色）。



现在想象一个浅蓝色的点从第一个红点朝着中间点移动，同时另一个浅蓝色的点从蓝点出发朝着最后一个红点移动。当然这两个浅蓝色的点移动速度不一样，但它们会调整速度，保证同时到达目的地。

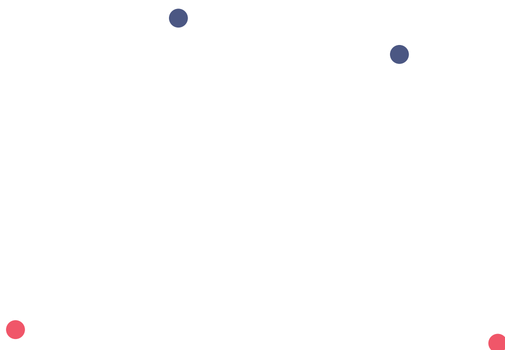


我们在两个浅蓝色的点之间绑上一根橡皮筋（之所以绑橡皮筋，是因为两点间的距离会随着移动而变化），橡皮筋上有一个粉色的点，该粉色的点从一个浅蓝色的点移动至另一个浅蓝色的点，并调整速度，与浅蓝色的点同时开始和完成旅行。

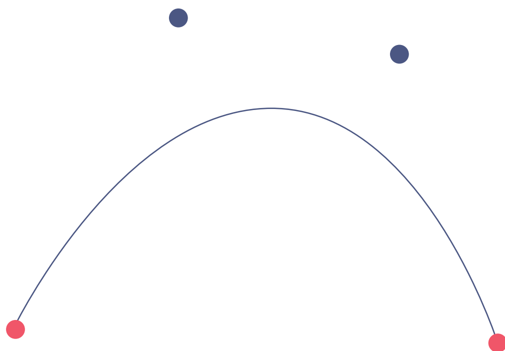


这样一来，如果我们描出粉色的点走过的路线，就会得到由红点和蓝点定义的贝济埃曲线。

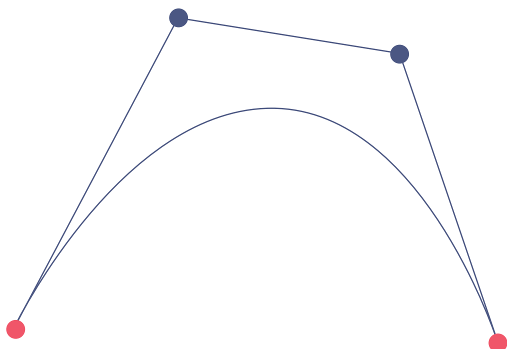
如果有 4 个控制点怎么办？过程还是类似的：从一个点开始，拖到另一个点，再到下一个点创建“手柄”（第二个中间点），直到最后一个点。这 4 个点如下所示。



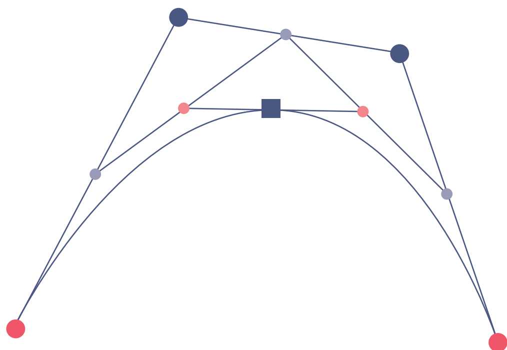
结果就是这个“哭脸”。



这是怎么得到的呢？还是通过与前文类似的过程：把第一个点连到第二个，再到第三个点，再到最后一个点。



现在有 3 个浅蓝色的点在这 3 条线段上移动，它们同时出发，同时到达。第一个和第二个浅蓝色的点之间有一条橡皮筋，上面有一个粉色的点在移动；第二个和第三个浅蓝色的点之间也是如此。然后在这两个粉色的点之间绑上一条橡皮筋，上面有一个蓝色的方块在移动，它移动的轨迹就是曲线。



就是这样啦。哦，还不全是，你还可以继续添加控制点，画出其他非常漂亮的贝济埃曲线。

如果下次你在计算机上使用贝济埃曲线，但画出的东西不如预期的话，你就对自己说，毕加索的画也许并不像有些人想象的那么简单。

3 “卡丽熙”并不是《权力的游戏》里最重要的人

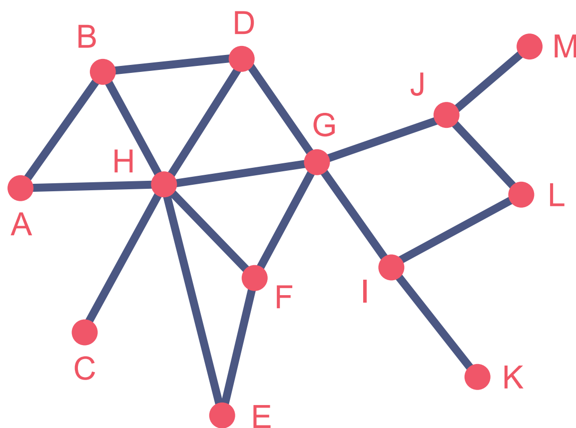
无论你是否看过这部剧（或读过书），我相信几乎每个人都听说过电视剧《权力的游戏》，对吧？但最近关于这部传奇的数学研究发现，抛开表象，丹妮莉丝·坦格利安“卡丽熙”并不是主角。



不久前，美国数学协会的《数学视野》（*Math Horizons*）杂志发表了一篇名为《权力的网络》（*Network of Throne*）的文章，作者是美国明尼苏达州玛卡莱斯特学院的教授安德鲁·贝弗里奇和毕业生单杰（音译）。在这篇文章中，作者使用网络和图论的数学技巧，再借助一点谷歌的算法，试图确定谁是《权力的游戏》的真正主角。

在继续解释贝弗里奇和单杰的做法之前，我得承认我的标题夸大了一点。虽然丹妮莉丝·坦格利安在这篇文章里确实不是主角，但是作者的数据库基于乔治·R. R. 马丁的第三本书《冰雨的风暴》（*A Storm of Swords*），我们的“卡丽熙”还没有完全受冷落。

现在让我们看看他们是怎么做的。作者构建了一张图，其中包含剧中的人物及其之间的关系。图可以被理解为一组点（我们称之为“顶点”）和将其中一些点两两连接起来的线（我们称之为“边”）。大家对一个简单的图的例子很熟悉，比如 Facebook：顶点就是这个社交网络的用户，如果两个人是网络中的好友，则用边连接起来。在本书的第 1 章中，我们已经使用了一些图来解释“多数错觉”。

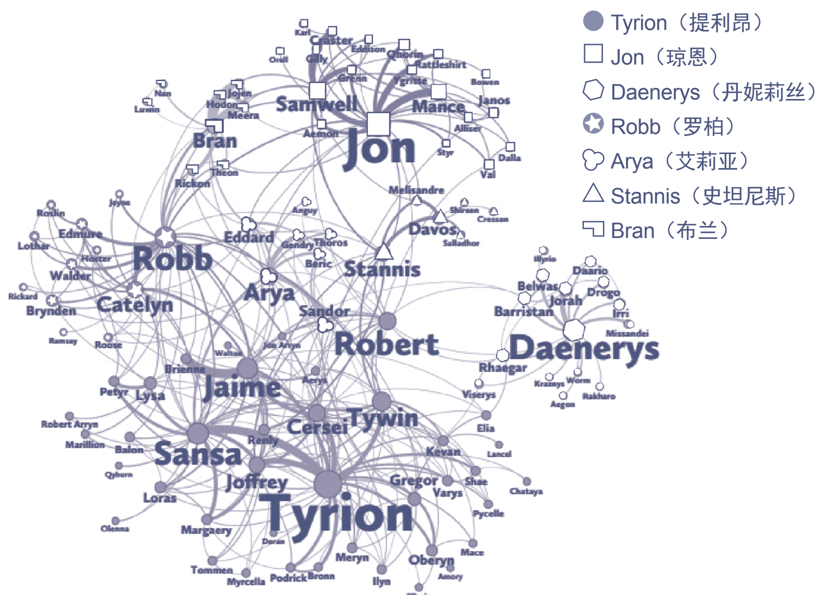


让我们回到《权力的游戏》。在贝弗里奇和单杰的图中，顶点是出现在书中的所有人物：每个点代表一个人，总共有 107 个顶点或人物。

如果 (1) 二人之间有血缘或友好关系，(2) 二人被一起提及，或 (3) 二人的名字在文本中出现时的距离不超过 15 个单词，就把这些点用边连接起来。这就是明尼苏达数据的重要性所在，你得无聊到去做这种事情。开个玩笑啦。

根据这三个规则，作者在点之间建立了 353 个连接（边）。具体来说，每个连接都被分配了一个指标：权重取决于人物一起出现的次数、关系的亲疏……我们可以将这个权重解释为一些边（连接顶点的线）比其他边更粗，因为它们在文本中出现得更频繁。

除了边的粗细或权重之外，顶点及其标签也根据其重要性而大小不同。为了定义顶点大小，作者使用了 PageRank 算法——谷歌按重要性为页面排序的算法。是的，就是我们在线性代数里面学过的那些特征向量。顶点标签的大小则基于另一个度量指标——顶点的中心度，根据与其相连的顶点数量和关系的权重计算得出。根据这些规则，这个算法给出了《冰雨的风暴》的人际关系结构图（或网络）。



我们从上页图中可以看出，作者用来构建《权力的游戏》关系图的算法给出一张图，其中的顶点聚集成 7 个社区，或连接非常紧密的子网络（在上页图中，每个社区的顶点都以不同的颜色标出），刚好符合该书的叙述主线。

我们还观察到，一切都是围绕着一些高度关联的人组织起来的：提利昂、琼恩、罗柏、丹妮莉丝……

我们几乎在任何真实的社交网络中都可以观察到类似的情况（社区分组和几个顶点的巨大影响）。事实上，正如我们在第 1 章所看到的那样，正是这些连接紧密的角色带来了多数错觉。

那么，根据贝弗里奇和单杰的算法，真正的主角是提利昂。接下来是琼恩·雪诺，因为他在网络中占据了一个独特的位置，既可以与贵族领主联系起来，也可以与守夜人和塞外野人联系起来。之后是珊莎·史塔克，因为她有成为女继承人的潜力，却在权力游戏中扮演一个小卒。

正如我们所说过的，丹妮莉丝·坦格利安并没有那么重要，不过这是因为我们用的是第三本书，不要紧张。事实上，我鼓励你为后续几本书做这张图，你会看到“卡丽熙”的顶点如你所愿变得更大。好吧，最后，要在电视剧和这些工作之间选的话，我还是由着剧迷们说服我去看这部电视剧吧。

4　系鞋带中的数学

数学家就是系个鞋带也能提出问题的那种人。具体来说，是关于如何系鞋带。有多少种不同的系法？哪种系法效率最高？

对于那些不在科研界工作的人来说，《自然》杂志可能没什么紧要的。但对于像我这样的人来说，在这本杂志上发表文章可以保证获得很高的声望（必要时还会获得一些可以继续推动学术生涯的加分项）。



但是数学家有一个问题：这个学科的文章被其编辑委员会接受的数量少之又少，所以，实际上我们几乎从来不会把文章发给《自然》。例如，在全世界媒体上影响最大的两个数学结果——安德鲁·怀尔斯证明费马大定理，格里戈里·佩雷尔曼证明庞加莱猜想都只在数学论坛上展示过。

实际上，这对佩雷尔曼来说简直是一种羞辱（我本来想说有人给了他两巴掌，不过听起来不太好）：他没有在任何专业杂志上发表完整的证明，而只是在互联网上发布了一系列论文。而佩雷尔曼则继续他的“表演”：他放弃了授予数学家的最重要的奖项——菲尔兹奖，以及美国克雷数学研究所为解决千禧年大奖难题之一而颁发的 100 万美元。就这样了。

我们说回《自然》杂志。我前面说，发表在《自然》上的数学论文非常少，其中大多数数学论文还是跨学科研究，与微分方程组的数值解有关。这些文章通常也会对其他学科分支产生深远影响，例如物理或某些工程学科。正因为如此，澳大利亚莫纳什大学的教授博卡德·波斯特于 2002 年在《自然》上成功发表了一篇文章，这就非常令人惊讶了……这篇文章的主题是关于系鞋带的数学！

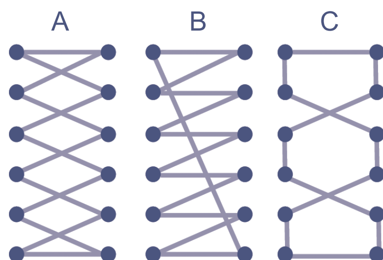
在这篇文章中，作者论述了 3 个对人类来说绝对超验的问题：有多少种不同的方式将绳子穿过鞋子的孔眼？最少需要多长的绳子？哪种系法最牢固？第一个问题的答案是：很多。如果有 12 个孔眼，我们可以从其中任何一个孔眼开始，穿过另一个，以此类推，直到最后一个，那就是 $12! = 479\ 001\ 600$ 种（澄清：12! 可不是“大喊 12”，而是 12 的阶乘，即 $12! = 12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$）。此外，这些穿法的每一步都有上下两个方向，所以总共有 1 961 990 553 600 种穿法。

当然，其中大多数穿法很荒谬，光靠这么简单的分析是没法在《自然》上发表文章的。波斯特提出了一些逻辑上的限制：必须在同一端开始和结束，每个鞋带孔都必须起到收紧鞋子的作用，并且在某些标准下整体上看起来是美观的。

这样一来，得出一个公式就要复杂得多，但波斯特得出了这个公式，对于一只鞋子，有 43 200 种“合理”的系法。

那么，在这 43 200 种系法中，哪种方法需要的鞋带最短呢？这是一个更复杂的问题，因为我们不能忘记，其中一个条件是每个鞋带孔都要起到固定鞋子的作用。在使用了各种组合数学方法之后，作者再次得出结论：从让鞋带最短这个意义上来说，所谓的“蝴蝶结”系法（C）是最高效的。

还有一个问题，即哪种系法最牢固。要解决它，就必须定义恰当的方程来为这一现象建模，来研究最传统的两种系法：交叉（A）和直线（B）。



在上图中，A和B是最常见的系鞋带方法，它们也是最牢固的。
C是使用鞋带长度最短的做法之一

文中还讨论了最后应该如何打结来使其尽可能牢固。我们大多数人首先用鞋带的两端打一个结，然后再顺着第一个结的方向打出两个环。这是一个习俗和惯用手的问题。

好吧，如果第二个结，即拉出环的结与第一个结的方向相反，那么这个鞋带就没人能解开了。但不要忘记爷爷奶奶给我们打三重结带来的安全性，这样踩到鞋带时就不会摔倒了。澳大利亚数学家没有考虑这一点。



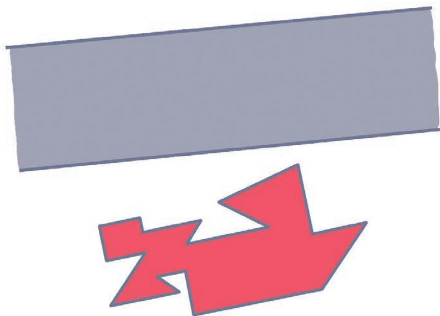
5　如何让沙发穿过走廊

人人都搬过家。你搬动家具，让它们通过走廊，有些家具让你出了一身汗。沙发最大可以有多大，才不会在转弯时被卡住？不，我们不考虑装在盒子里的可拆卸沙发。

新年伊始，正是万象更新和立下宏伟目标的好时候。有些人决定报名健身房，更多的人报名英语课，还有小部分人，节日过后口袋里还剩了点钱，准备更换家里的家具。这三个目标都不简单，但既然我们讨论的是数学，那就不管英语和健身房了——尽管我们最后很有可能还是出了一身汗。

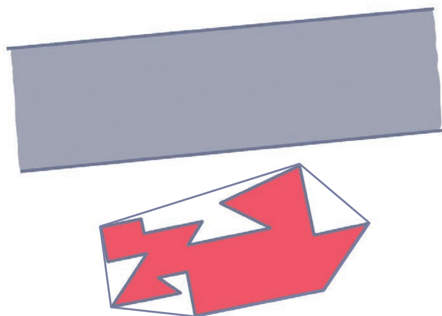
我们面临着一个不太困难的挑战：假设我们想要沿着走廊搬动一件家具，它最大可以有多大？是的，虽然这听起来有点出乎意料，但这确实是一个数学家们也在思考的问题，特别是因为它应用于机器人领域，而且惊喜不止一个。那么我们现在就来看看沙发的问题。

为了简化问题，而且由于我们假设机器人在地面上移动，我们只需考虑二维的情况：走廊是两条直线之间的地面，我们想知道它是否可以容纳某个平面区域（代表沙发）。如果走廊是直的，那么人们在三十多年前就知道答案了，我在这里就不详述了。但如果有人想要深究，我就在这里给出一些关键词：只要按如下方式计算家具的宽度。在下图中，蓝色的是走廊，红色的是沙发：由于其大胆的设计，你可以把它叫作“毕达高斯欧拉板”（Pythagausseulerdöska）沙发。

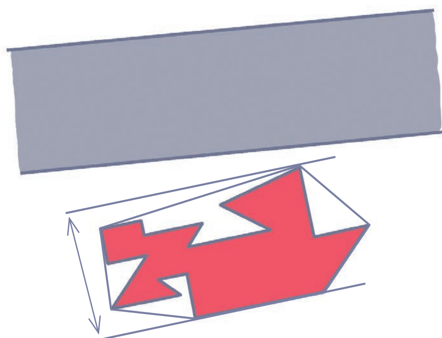


对于这个二维的例子，要找到答案需要两个基本步骤。第一步，我们计算出家具的凸包络，把空的地方填满，如下页图所示。直观地

说，你可以把它想象成用一根松紧带环绕整个沙发，凸包络就是松紧带的形状。



接下来，我们计算包围该图形（沙发的凸包络）的两条最接近的平行线之间的距离。这只需要计算每条边（松紧带）与距离这条边最远的顶点之间的距离，也可以考虑使用类似于管道工测量管道内径的技术。



如果这两条平行线之间的距离小于走廊的宽度，那么家具就可以通过，否则不行。在这种情况下要怎么办呢？这个问题我还是留给搬运工吧。当然，如果走廊不直的话，情况就更复杂了。1996 年，数学家利

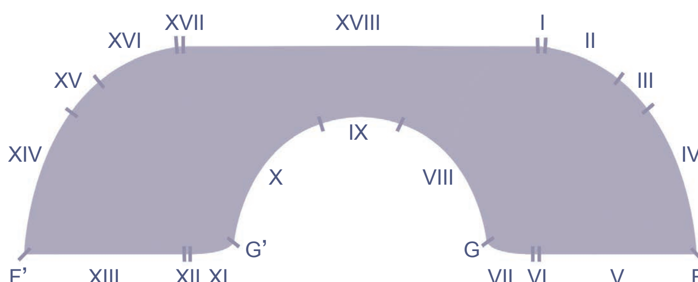
奥·莫赛研究了可以通过 1 米宽“L”形走廊的家具的最大面积。

如果你稍微思考一下的话，你可能就会怀疑或认为答案是半径为 1 米的半圆，它在这种情况下可以旋转，是我们可以搬运的面积最大的物体，顺便说一下，其面积是 $\pi/2 \approx 1.570796$ 平方米。但这个答案不对。英国数学家约翰·哈默斯利（顺便说一句，他是渗流理论专家）发现了一个面积更大的“沙发”，也能通过那条走廊。

哈默斯利的“沙发”就像个老式电话听筒，由圆弧和直线段组成，面积为 $\pi/2 + 2/\pi \approx 2.2074$ 平方米，大于我们之前说过的半径为 1 米的半圆的面积。然而这还不是可以沿着走廊搬运的最大物体。1992 年，美国人约瑟夫·L. 戈维尔设计了一个比之前更复杂的变体，其面积也更大。

戈维尔的“沙发”里没有圆弧，但有更复杂的曲线（仍有线段），其面积为 2.219531669 平方米，这是迄今为止的最高纪录。在那之后，还没有人能够证明这是面积最大的沙发，或找到另一个更大的沙发。

很有意思，你不觉得吗？当然，北欧家具制造商很快就让这些精彩的智力挑战黯然失色，它们把沙发装在鞋盒大小的盒子里售卖。太可惜了！



6　推荐列表毫无用处

难道你不觉得，那些想要照顾我们生活的人，并不知道如何照顾自己的生活吗？确实，你说的有道理，我们可以在数学上证明，如果我们有时能无视那些推荐列表，问题可能解决得更快。

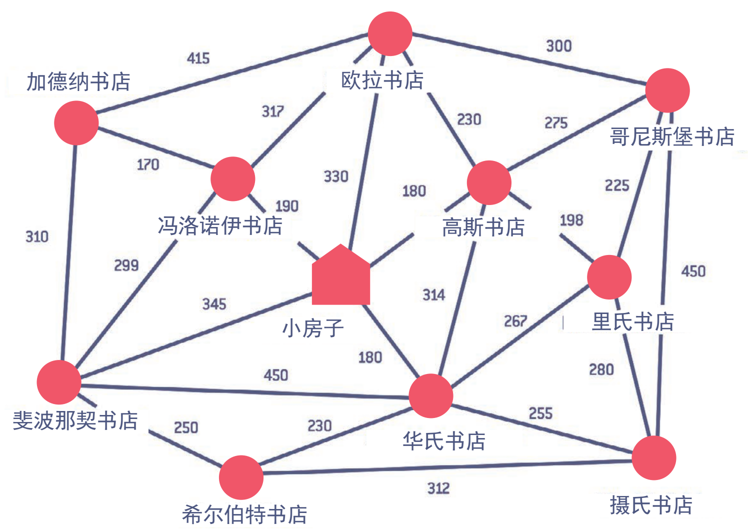
每到年末家庭聚会的时候，我们都要耐心地听某个亲戚，比方说姐夫吧，就我们应该怎么生活给出他的绝妙建议大礼包。就像我妈说的，一年才见面两天，听听人家讲话而且态度好一点会掉块肉吗？但是，姐夫的这种癖好实在是出了格，他不在网上找到“xxxx 的 10 个建议”，这一天就过不去……

今天我要提个建议：不要提建议。因为这不仅会让他人厌烦，而且如果人们都听从相同的建议，并且全都汇聚成一种个人形象，那么无论是作为人类还是作为 Twitter、Facebook、Instagram、Flickr 等各种社交软件的用户，都不会进化，我们不会有所改善。我们都可能变得稍微好



一些，但不会达到最高水平，因为这里没有能产生必要的突变以改善物种的区分因素。嘿，你看我多严肃，多深刻！我将用数学来解释它，因为这对我来说更容易。至少我要试一下。

优化问题（找到成本、收益、时间等目标函数的最优解）无法使用经典方法求解，哪怕利用计算机的力量也不行。其中最典型的一个问题被称为“旅行商问题”。旅行商问题非常简单：给定一组由道路连接的城市，设计一条最短路线，从某一点出发，经过所有城市后返回起点。例如，在下页图中，就是要设计一条路线，从小房子标记的点开始，经过所有书店并返回起点。



第一种方法，有人可能会想，只需尝试所有可能的路线，交换到访城市的顺序，计算每条可能路线的长度并挑出最短的路线就可以了。挺有道理。好吧。还有一点细节：只有当城市数极少时才能这样求解。为了对此有个概念，我来解释一下：假如有 100 个城市，可能的路线数就是 100!（100 的阶乘，感叹号的意思不是尖叫），相信我，100! 是一个异常庞大的数，它比可观察宇宙中的基本粒子数还要大得多。因此，哪怕有计算机的计算能力，第一种解决方案也行不通。

当我们即使利用计算机也无法找到最优解时，该怎么办呢？好吧，那就只好退而求其次，尽可能找到最好的解……为此，我们可以使用比如所谓的遗传算法：这种算法试图模拟大自然创造适应环境的物种的进化过程。我来试试用旅行商问题的例子解释它。

假设有 6 个城市，我们分别称之为 A、B、C、D、E、F。我们试图找到这些字母的最佳排列来得出最短距离（从 A 出发并返回 A）。构成遗传算法的元素如下。

- 初始总体。这个初始总体包含我们事先确定的一些个体。为了获得这个总体，我们只需要随机找到所需数量的排列，然后在其中抽签选择几个就行了。假设在我们的例子中，初始总体是 6 个样本，我们随机构建这些个体，得到了：

  {ABEFDC, ABCEFD, AEBCFD, ACDBEF, AEFCDB, ADCBFE}

我们总是从 A 开始，它是起点，也是我们最后要回到的终点。

- 评估函数。这是衡量我们随机创建的总体中的元素有多好的标准，它为每个元素分配一个衡量其能力好坏的数。在 6 个城市的例子中，这个数就是每条路线的长度，也就是把每个排列的相邻元素之间的距离加起来：例如，对于 ABEFDC，我们测量从 A 到 B 的距离，加上从 B 到 E 的距离，再加上从 E 到 F、从 F 到 D、从 D 到 C、从 C 到 A 的距离。

在这个例子里，总长度越小，能力就越高，因为我们要寻找走过的总距离最小的解。

- 通过杂交选择的过程。在初始总体中的个体之间抽签并配对杂交，给能力高的个体更多的票数，也就是说，能力最高的个体有最大的机会来与其他个体杂交。现实生活中也是这样。在 6 个个体的例子中，我们将选择 3 对（如果某个个体的能力真的非常高的话，那我们可以让它同时参与几对）。比如，如果选择了 ABCEFD 和 ACDBEF 这一对，那就让它们杂交来得到下一个总体中的新个体。

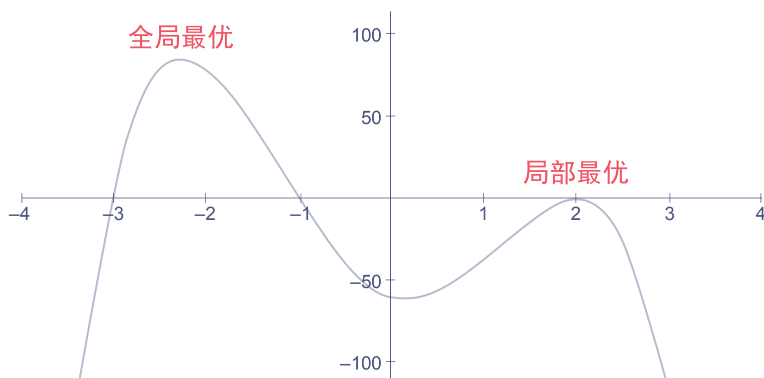
杂交的方法有几种，我讲一种简单的：再抽一次签，选择一个 2 与 4 之间的数，也就是 3。这意味着 ABCEFD 与 ACDBEF 杂交会得到两个子代。关于第一个子代，我们选择 ABCEFD 的前 3 个城市——ABC，而 C 之后的城市则遵循它们出现在另一个亲代 ACDBEF 中的顺序：C

之后是 D，然后是 B，但是因为 B 已经出现过了，所以我们跳过它去 E，最后是 F。因此，第一个子代将是 ABCDEF。现在我们从 ACDBEF 出发，并重复同样的步骤，我们得到了第二个子代：ACDBEF（有趣的是，它和它的亲代一样，但我们不用担心它）。

通过这个程序，我们随机选择的 3 对个体都会各自得到 2 个子代，也就是说，我们得到了 6 个新的个体，如果想优化结果，可以重复这个过程。但注意！有一个非常重要的细节，这里要有一个必不可少的因素介入。没有它，这个方法就行不通；没有它，大自然就不会获得最能适应环境的个体——突变。

突变并不常发生，而且大多数都是退行性的：一般来说，突变会带来更糟糕的个体，但在非常罕见的情况下，它会产生适应性更好的个体。如果没有突变，达尔文的进化过程就毫无意义。所以，我们要做的是，一旦得到子代，就再进行一次抽签，但是产生突变的可能性非常小（比如千分之一）。因此，在 1000 个个体中，大约只有 1 个突变。假设我们在之前的 ABCDEF 过程中获得的子代之一是突变体，那该怎么做呢？再抽一次签（我们已经抽过好几次了），得到 2 到 6 之间的两个数，例如 3 和 5，然后交换出现在第三位和第五位的城市以获得 ABEDCF。现在再来衡量一下新总体的能力，如果我们感到满意就停下来，否则重复这个过程。

令人难以置信的是，这种类型的算法有如此多的抽签，做出如此多的随机决策，却只需要很少的步骤就能得到非常好的解。事实上，有一个数学结论能保证我们通过这种方法尽可能接近最优解（子代越多越好）。它还证明，如果不考虑某些元素，我们可能永远不会接近上面说的这个解，因为我们会被卡在所谓的局部最优，无法达到全局最优——而这才是我们想要的。



但你可能会问，这一切与使用社交软件的推荐列表有什么关系？如果我们都跟着推荐列表走，那就不会有进化的过程：我们停滞在局部最优，因为这些列表中只有彼此相似的个体，从而消除了多样性，而这对于获得更好的元素是必不可少的。从某种意义上说，“混血”对于人口的改善至关重要，而严守内婚制的群体（如许多古代王室）往往会退化并产生有缺陷的个体。

我有一个建议：多和别人打交道！如果你做了在其他人眼中非常疯狂的事，请记住西班牙建筑师高迪所说的：“我的想法是无可争议的逻辑，唯一让我怀疑的就是从没有人这么做过。”所以，不要怀疑了。

7 数盲的危险

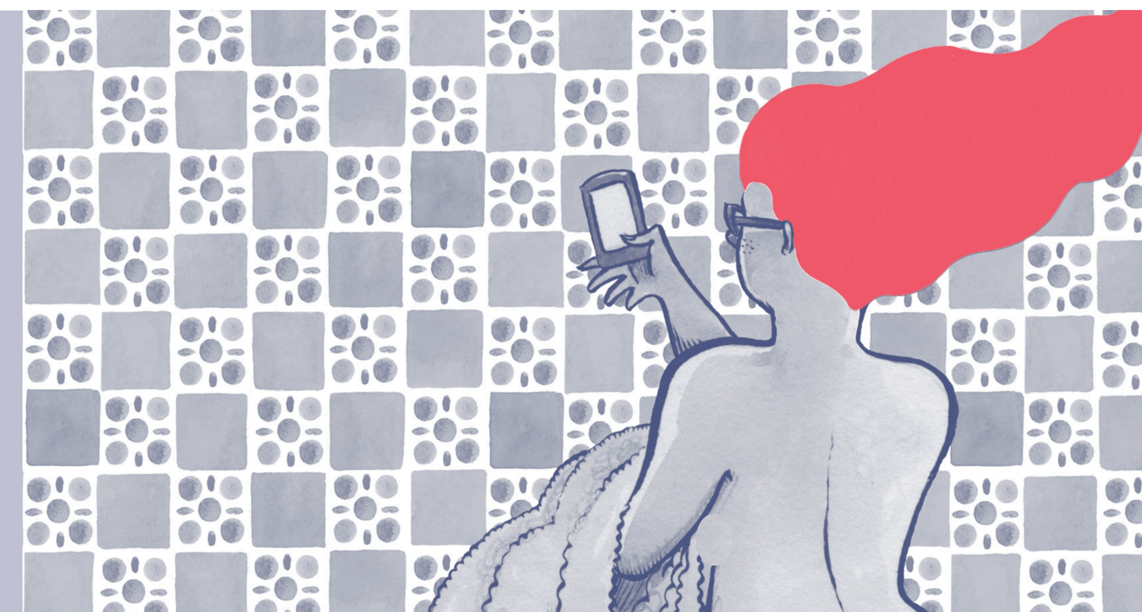
数盲（无法掌握基本的数学概念）可能会诱使我们产生并不理性的行为，例如无休止地购买彩票。有时这会产生严重后果，特别是当有人向我们推销理财产品或展示医学分析的时候。证明如下。

在如今这个时代，我们不断受到统计数据的轰炸，相信我，这些数据并非总能得到正确解释。有些数据对我们影响更大，例如与失业相关的数字；有些则影响不那么大，比如某个球队的持球时间。

好，我知道对有些人来说，前面例子里面的优先级应该调换一下，他们甚至在主办国寻求经济救援的同一天跑去看足球比赛。这世界上什么人都有啊。

但我毫不怀疑，如果统计数据关于刚刚做过的一项医学检查，看看我们是否患上了致命的疾病，那么我们马上就会紧张起来。正因为如此，再加上我们都会收到分析结果，了解如何严谨地解释它们，并采取理智的行动还是有好处的。

想象一下，你做了一个检查看看是否得了某种不治之症，这种病会



导致快速而非常痛苦的死亡。假设检查结果是阳性的。在这种情况下，如果不知道检查的可靠性和在人群中发病的概率，有些人就会做出对自己和家人非常有害的偏激决定——毕竟也没什么好顾忌的了。但是，如果他们没有得病呢？

是的，他们可能没有得病。如果测试结果呈阳性，那么患上这种恶疾的概率是多少？显然，这要看情况。看什么情况？我刚刚说过，要看这种疾病在人群中发病的概率和检查的可靠性。举个例子来说，让我们假设这种病只影响 0.1%（千分之一）的人群，并且已经对 10 000 人（这里为了方便计算取了个整数）进行了测试。至于测试的可靠性，假设确实患病，医学检查能在 80% 的情况下正确地检测到它；如果没得病，则医学检查在 90% 的情况下是正确的。这样的话，如果结果呈阳性，你生病的概率是多少？有人回答说 80%。我们来看看吧。

如果疾病的发生率为 0.1%，那么在 10 000 人的群体中，差不多会有 10 人生病。在进行检查时，这将给出 8 个确实患病的阳性结果（仅在 80% 的患者中正确检测到疾病）和 999 个误报。这 999 个误报来自哪里？前面说过，只有 10 人患病（因为发病率为 0.1%），那就是有 9990 个健康的人。由于检查只能在 90% 的情况下正确检测到你是否患病，因此在 9990 例中会产生 10% 假阳性的情况，也就是 999 个假阳性结果。

总之，在测试的 10 000 人中，1007（8 + 999）人将呈阳性，但其中只有 8 人患病。因此，如果测试结果为呈阳性，那么在这种条件下你生病的概率是 8/1007，即 0.79%：你只需利用贝叶斯定理……

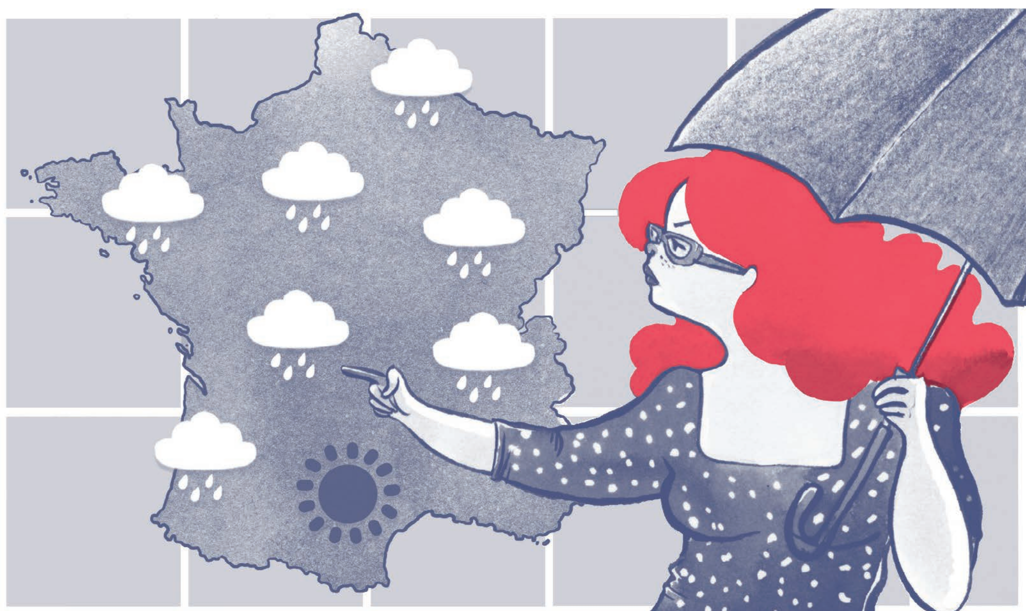
好吧，在你做傻事之前最好再去做个别的检查。要把自己的某些照片上传到社交网络上，请自便，我无权干涉。不道德的事与照片无关，道德标准和所有重要的东西一样，它隐藏在内心中，不为人知。



8　混沌和气象学：真的能预测天气吗？



我们常常把气象预报员的错误当作笑柄，也不怎么相信他的预测。但是预测天气变化真的这么容易吗？难道没有数学家和（或）物理学家找到预测天气的准确公式吗？



有人问我什么是数盲，我通常会讲约翰·艾伦·保罗斯在他的《数盲》（*Innumeracy*）一书中提到的第一个轶事。有一次，他与几位朋友共进晚餐，当时电视上的气象预报员告知周六下雨的可能性为50%，周日下雨的可能性也是50%。根据这些数据，桌上一位朋友推断出周末下雨的可能性为100%。

用概率反驳这个论点并不困难，但我认为最简单的方法就是使用相同的推理来计算明天每个小时下雨的概率，如下表所示。

小　　时	降水概率	小　　时	降水概率
00:00~01:00	10%	12:00~13:00	10%
01:00~02:00	10%	13:00~14:00	10%
02:00~03:00	10%	14:00~15:00	10%
03:00~04:00	10%	15:00~16:00	10%
04:00~05:00	10%	16:00~17:00	10%
05:00~06:00	10%	17:00~18:00	10%
06:00~07:00	10%	18:00~19:00	10%
07:00~08:00	10%	19:00~20:00	10%
08:00~09:00	10%	20:00~21:00	10%
09:00~10:00	10%	21:00~22:00	10%
10:00~11:00	10%	22:00~23:00	10%
11:00~12:00	10%	23:00~00:00	10%

要是按照保罗斯的朋友的推理的话，明天下雨的可能性是240%。没话讲了。但这不是我想谈的内容，事实上，当我讲这个故事的时候，人们经常会提出这个问题，而且我们已经嘲笑了把概率加起来的做法。“明天下雨的概率是50%”是什么意思？总有人开这个老套的玩笑，说概率肯定是50%，因为只有两种可能性：下雨或不下雨。我已经说过这是个老笑话了。我们继续吧。

如果下雨的概率是50%，我是否必须带雨伞？也许气象学家同样对天气会怎么样一无所知，所以就说下雨的概率是50%？这50%是怎么

计算出来的呢？有些问题的答案很简单，而有些答案则要复杂些（有些答案更复杂，但我们会把最后这些问题留给专家）。

让我们看看那些简单的答案吧："明天下雨的概率是 50%"是什么意思？这意味着，如果我们考虑几个天气预报说下雨概率为 50% 的日子，大约其中一半会下雨。我需要带伞吗？是的，不过稍微淋湿点也没什么大不了的。气象学家是对未来的天气一无所知才说 50% 的吗？我不这么认为，虽然这总是可能的。

气象学家是怎么算出 50% 的？为了稍微细致一点地回答这个问题，我们必须**大致**了解天气预报背后的原理。来吧。事实上，人们已经熟知与气象相关的数学方程式：流体动力学方程（也与一级方程式赛车或飞机机翼周围的气流相关）和热力学方程。但问题在于，这些方程不能通过确定的函数来求解，就像没有求解 5 次以上的方程的公式一样。在无法精确求解方程的情况下，人们会进行数值模拟，给出精确解的近似值。对于天气预报，**大致**做法是这样的：

- 首先，将地球或一个区域划分成小的单元；
- 其次，为每个单元标记特定时刻的气象条件；
- 最后，应用这些方程，根据在相邻单元格中测量的初始数据，并使用前面提到的方程式，看看这些气象条件将如何演变。

如果一切都如此清楚，为什么天气预报会出错？好吧，因为这些方程式（我们说过它们并不简单）对我们引入的初始数据非常敏感。数据的一点点微小变化，就可能会给某个区域带来完全相反的预测。这就是所谓的蝴蝶效应：亚马孙地区的一只蝴蝶扇动翅膀，可能会在太平洋上引起台风。另一个原因是，测量仪器仅能达到一定的精度水平（还不算可能出现的其他错误），用于执行计算的初始数据不可能完全精确。

因此，为了减少这种不确定性，在数值模拟时通常会让数据发生一些微小的变化，这下就会得到出现在电视上的百分比了：如果用某些初

始数据执行 100 次模拟，其中 50 次的执行结果是下雨，另外 50 次是不下雨的话，他们就会宣布下雨的概率是 50%。你看，它并不像开头讲的小笑话那么简单，要推断气候的混沌行为，背后需要一套庞大的数学装置。

当然，一位朋友告诉我，严重的拇趾囊肿除了残酷割掉你对高跟鞋的热情外，也可以作为降雨的可靠预测因素。

9　病毒警报！为什么要接种疫苗？

有一个数学悖论，原本适用于社交网络中的友谊，但也可用于解释为什么必须接种疫苗来预防传染病。



有些父母在社交网络上或在发廊翻杂志时读到了某些内容，就反对给自己的孩子接种疫苗。这种“新时尚”引发了很多争论，这对于所有人来说都是一种不幸，而对于 2015 年 6 月死于白喉的一名西班牙加泰罗尼亚 6 岁男孩来说更是如此。在 21 世纪，本来没有必要解释为什么所有孩子都应该接种疫苗，但是在看到或听到人们在媒体上的一些言论之后，我觉得要在这里再提几件关于群体免疫重要性的“小事”。

在第 1 章中，我们讨论过“友谊悖论”的现象。基本上，这个悖论证明了你的 Facebook 好友拥有的好友数量一般而言比你的多。这就造成了矛盾，因为从直觉上看，这样似乎没有道理。

实际上，“友谊悖论”证明了，如果对你的好友的好友数量取算术平均值，那么这个平均值会高于你的好友的数量。简而言之，你的好友的好友数量平均比你的好友数量多。我们已经说过了如何把这个悖论用于研究社交网络——一个所有人都被囊括在内的网络。

今天的话题更严肃一点：我们要研究传染病，以及所有儿童都应接种疫苗的绝对必要性。当然，我们说的是所有可以接种疫苗的人，有些人由于健康问题（新生儿、病人……）无法接种。对于成年人，包括老年人也是如此。

想想在新疾病暴发时，对紧急疫苗接种运动应用“友谊悖论”的例子。在这种情况下，由于缺乏经济和人力资源，要为全体人口接种疫苗实际上是不可能的。但为了提高免疫力，应当尽快为尽可能多的人接种疫苗。

在这项任务中，友谊悖论可以帮助我们。事实证明，一种有效的策略是，随机选择一定的初始人群来接种疫苗，并且让其成员各自指定一些朋友，并要求他们的朋友数要多于指定他们接种疫苗的人的朋友数量。如果我们为这些大量接触其他人的朋友接种疫苗，那么只需要为 20%~40% 的人群接种疫苗就可以防止疾病的传播。

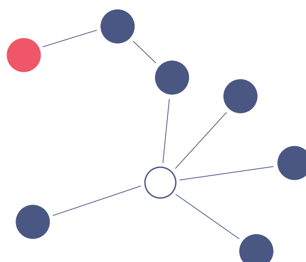
如果我们不采用这种基于友谊悖论的策略，而是遵循纯粹的随机手段，那我们就需要接种 80%~90% 的人才能得到相同的效果。这种传播方法也适用于推销保险或午餐盒，你可以提供朋友的名字来换取一个赠品沙拉碗……

现在我们来看看友谊悖论对于另一个情景的影响：抵抗疾病的疫苗已是众所周知的，并被列入官方的疫苗接种时间表。一些年轻人甚至没有听说过某些疾病，有些年轻的医生也从来没有诊断过这些疾病。

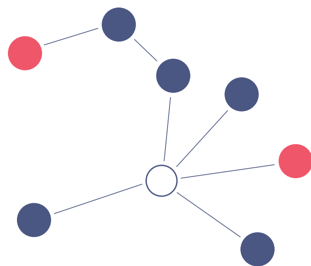
就像 2015 年发生的那样，如果突然出现白喉病患者，第一步，这名患者会感染所有与他有过身体接触的人，即他的所有朋友。但是请注意，这些朋友会平均有比第一位患者更多的朋友，并且还会继续传播。以此类推，这种传播是指数级的。如果大多数人口没有接种过白喉疫苗，就会发生这种情况，但幸运的是，人们已接种过。所有人吗？不。易感人群仍可能会被感染（包括反疫苗的儿童）——因医疗原因而不能接种疫苗的婴儿、儿童和成年人，还有年迈的老爷爷和老奶奶。

我们能做些什么来保护他们呢？给所有人（我是指所有能接种的人）都接种疫苗，法律应该如此规定。这样一来，那些不能接种疫苗的人将位于已接种疫苗的朋友形成的“盾牌”的中心，这将防止疾病感染他们。

在下图中，我们用一个非常简单的图来表示这种情况。红色是感染者，蓝色是已接种疫苗的人，白色则是未接种疫苗却仍然健康的人。

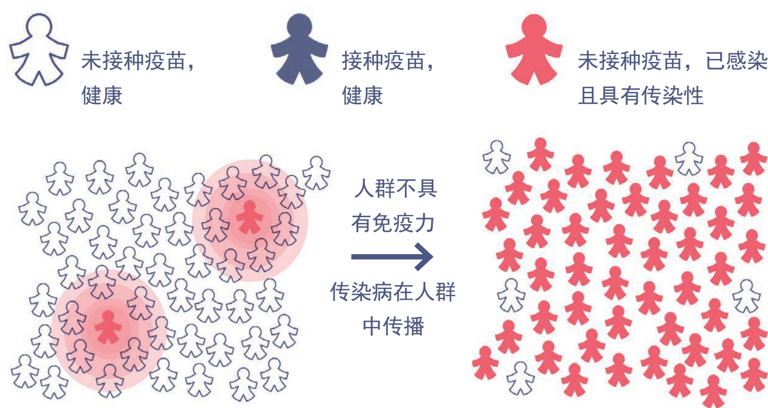


如果一个孩子赶了反疫苗的时髦，因为没有接种疫苗而生病了，而又有其他小朋友碰巧也没有接种疫苗——因为家长常常会在他们的圈子里分享这些“酷”时尚，那就要出大问题了，比如在学校开家长会的时候。或者，还有更糟糕的情况：如果有婴儿、儿童或成人因客观原因无法接种疫苗，他的朋友里却有一个这样的“时尚人士”。

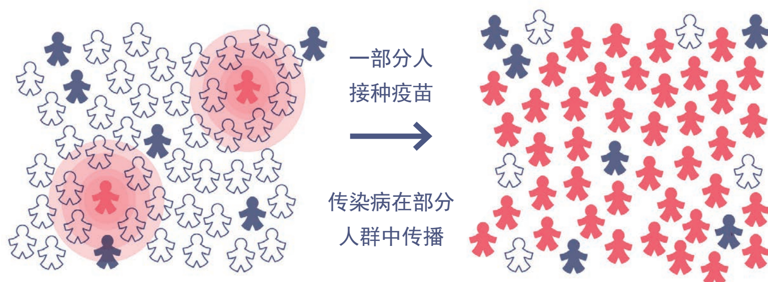


这是友谊悖论的消极面。确实，它能保证高效地实现群体免疫，这非常好，但它也能以同样的方式确保疾病传播得比我们想象的更快。防止这种情况发生的唯一方法是为所有能接种的社区成员都接种疫苗。

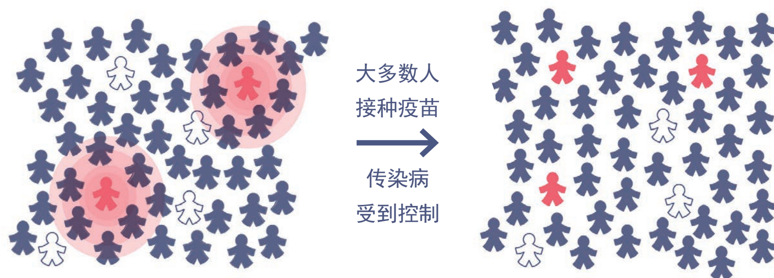
有人说一张图片胜过千言万语，我在这里放上了我在维基百科中找到的一张图片。如果大多数人没有接种疫苗（白色）会怎样？



不出所料，病情在大多数人中蔓延。如果我们为一些人但不是所有人接种疫苗会怎么样？在那些不能接种疫苗的人周围加上几个赶了这个“时髦”的人吧。



由于友谊悖论，疾病也会传得很远。消灭传染病的唯一选择是给所有能接种的人接种疫苗，就像人们对待白喉那样……我们已经很长时间没有见到它了。



不用再多说了，无须辩驳。疫苗在社会免疫方面的效用已被证明，就是这样。某些成年人的愚蠢导致一个6岁的孩子丧命，真是太可悲了。

10 听出鼓的形状

这个问题看起来似乎很荒谬，却蕴含了一个非常有趣的数学谜题，有一批数学家花了将近 50 年来研究它，这些人就是这样的……

在回答这个问题之前，我们先尝试理解问题的含义：“听出鼓的形状”是什么意思？鼓通常由共鸣箱和鼓面组成，鼓面产生的振动会被共鸣箱放大。

确实，绝大多数鼓面都是圆形的，但是有人可能想做三角形的鼓面，甚至形状更奇特的鼓面，比如一幅地图或爱人的脸。

好吧，一些方程式告诉我们，鼓面将如何根据其形状来振动。这是因为鼓产生的声音取决于与这些方程相关的某些数字，这些数字叫作**特征值**，在许多数学问题和应用中起着重要作用，比如在我们执行搜索时，谷歌使用的对互联网页面进行排序的方法。

那么，回到这个问题，两个不同形状的鼓面能否具有相同的特征值（并因此产生相同的声音）？这个问题是马克·卡克在 1966 年提出的，



它又重新引出了赫尔曼·魏尔在此前 20 多年提出的问题。

卡克的文章一经发表，约翰·米尔诺，20 世纪下半叶最杰出的数学家之一，就率先给出了这个问题的答案（事实上，他在此前两年就找到了例子）。不幸的是，米尔诺的答案就是数学家常给出的典型答案，你我这样的普通人则会指责它过度抽象：米尔诺说有些鼓听起来完全相同，产生的声音相同，而它们的鼓面的形状却完全不同。

非常好，不是吗？但唯一的问题是，米尔诺的鼓只能在 16 维空间中建造（准确地说是鼓面，因为制作鼓还需要另一个维度）。因此这个问题仍然完全没有解决：对于二维鼓面，也就是所有鼓上的那种鼓面来说，两个不同形状的鼓面是否可能产生相同的声音？

为了找到二维空间中的答案（许多数学问题都是这样，在高维空间

中证明起来比我们所在的糟糕的三维欧氏空间更容易），直到 25 年后，3 位数学家——卡罗琳·戈登、大卫·韦伯和斯科特·沃尔珀特在二维空间里构建出形状不同、却听起来完全一样的鼓。当然，鼓的形状也相当“奇异”，如下所示。



如果我们要求鼓不能如此奇特，并去掉凹陷和尖峰（从技术上说，该区域是凸状的和可解析的），那么就像数学家史蒂夫·泽尔迪奇所做的那样，我们可以证明能够通过声音来区分鼓面的形状，也就是说，两个不同形状的鼓面总能产生不同的声音。

你已经看到了数学家手中的鼓是什么样的……不过，与鼓有关的最著名的科学家可能是理查德·费曼（见下图），他在 1965 年获得诺贝尔物理学奖。



11　夫妻间的小麻烦

当女性与男性共处同一个屋檐下时，生活带来的惊喜之一就是半夜上厕所时，不开灯的话就会一屁股坐进马桶里。前几次，女生可能会挤出一个温柔的微笑，但随着时间的推移，这就有点烦人了。我们能否就此设计出最佳的共存策略？

在别人留在飞机上的一本北美版《绝妙产品》目录中，我在一堆愚蠢的玩意儿中发现了一个马桶盖，它会根据座圈位置亮灯（我记得放下来是绿色，抬起来是红色），让大家半夜免受惊吓，而且不需要打开厕所的灯！这个发明该得个诺贝尔奖，对吧？

由于不是每个人都拥有这么“智能”的马桶盖，而且为了所有与异性生活在一起的人，我将从严谨的数学角度分析这个座圈问题，就像分析所有人类的重大问题那样。

显然，女性在共同生活的这一方面肯定是首先处于不利地位的。当女性独居时，座圈总是在它应该在的地方——放下来。因此，与男性一起生活时，女性不得不把它放下来的可能性不再是零，这是几乎肯定的，于是，女性上厕所时要费更多的力，哪怕只是举手之劳。

那男性有何感觉呢？与女性共用厕所时，男性的生活有什么变化？



好吧，对男性来说，即使是独自生活，他们对这项日常任务总会有能量消耗，因为他们要对这个卫生设备进行两种操作，一种操作是把座圈掀起来，另一种操作是放下来。是的，这对男性来说是一种合理的行动方式。因此，他们有时需要把座圈放下来，有时需要掀起来。

如果我们把男性上厕所是去小便的概率设为 p（这样一来，执行另一操作的概率就是 $1-p$），改变座圈位置消耗的能量为 C，则独居男性的平均消耗的能量 E 就是消耗的能量 C 乘以他在进行另一操作后再去小便的概率，加上 C 乘以他小便后再去放松肠道的概率。你只需要计算进厕所要做的事不同于上次的情况：

$$E_{\text{独居男性}} = p \cdot (1-p) \cdot C + (1-p) \cdot p \cdot C = 2 \cdot p \cdot (1-p) \cdot C$$

然而，正如我们之前所说，独居女性的能量消耗 E 为 0：

$$E_{独居女性} = 0$$

让我们看看，当他们开始共同生活时，男性和女性在这项任务上消耗的能量如何变化。显然，这将取决于这对夫妻在女性第一次半夜滑进马桶后建立的同居规则。

假设这对夫妻没有就此做出任何决定，即他和她都不在意用完洗手间后座圈放在哪里，并假设两人使用马桶的频率相同。对于这种行为模式，也就是说，如果没有关于座圈的规则，那么座圈被掀起来的概率是$\frac{p}{2}$（其中 p 是男性小便的概率，如前所述，再乘以他去厕所的概率$\frac{1}{2}$），座圈被放下来的概率将是 $1-\frac{p}{2}$。

在这种情况下，女性每次发现它被掀起来的时候都必须把它放下来，平均能量消耗的期望将是：

$$E_{同居女性} = C \cdot \frac{p}{2}$$

而男性的能量消耗则要考虑他要小便，且之前女性用过厕所消耗的能量 $C \cdot \frac{p}{2}$，或他自己为另一目的用厕所而消耗的能量 $p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} \cdot C + (1-p) \cdot p \cdot \frac{1}{2} \cdot C$。算一下就会得到：

$$\begin{aligned} E_{同居男性} &= p \cdot \frac{1}{2} \cdot C + p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} \cdot C + (1-p) \cdot p \cdot \frac{1}{2} \cdot C \\ &= C \cdot p \cdot \left(\frac{3}{2} - p\right) \end{aligned}$$

在这种行为模式下，受益方（如果有的话）是男性。女性的能量消耗从 0 变成了 $C \cdot \frac{p}{2}$，而男性的能量消耗则增加了 $C \cdot p \cdot \left(p - \frac{1}{2}\right)$，如果 p 小于$\frac{1}{2}$就会得到负数，这在正常的胃肠道条件下是难以想象的。提醒一下，p 是男性去洗手间小便而非其他操作的概率。正如我所说，通常它会高于$\frac{1}{2}$。简而言之，在从独居过渡到同居之后，如果没有规则，一对夫妻增加的总能量消耗是 $C \cdot p^2$。

但是，我们是不是应该管一管这个座圈问题呢？在我看来，当然应该。如果强制使用后把它放下来怎么样？这样女性再也不用把它放下来了，从而得出：

$$E_{\text{同居女性}} = 0$$

而对于男性来说，每当他去小便时就必须把它掀起来再放下去，我们得到：

$$E_{\text{同居男性}} = 2 \cdot p \cdot C$$

是的，我知道，这里只有男性消耗了更多的能量，但这对夫妻的平均能量消耗增加了多少？对于女性来说，这和独居没什么区别，而在这种假设下，男性的能量消耗增加了 $2 \cdot C \cdot p^2$。好吧，似乎这对夫妻消耗的能量增加了一倍……我搞错了，前一种方式更合理。

然而，还有另一种可能的策略，即让增加的能量消耗更为公平，而且不会增加能量消耗的总增长量。例如，假设男性在小便后以 $(2p-1)/p$ 的概率不管马桶盖，我们可以假设 p（男性小便而非……的概率）等于 $\frac{2}{3}$，那么这个概率将会是 $\frac{1}{2}$。换句话说，为了让这对夫妻在这个平凡又不可避免的方面更好地生活在一起，只要在睡前小便后放下马桶盖就足够了。

先生们，你看，如果你和一位女性住在一起，你只需要很少的能量消耗就让共同生活得到改善。此类研究不会让我们摆脱危机，但它们有助于我们暂时忘却世界的运转。至少，当我读到理查德·哈特的相关文章[①]时，我度过了一段愉快的时光。

---

① Richard Harter, *A game theoretic approach to the toilet seat problem*.

12 用《精灵宝可梦 Go》学数学

除非你离群索居，否则你肯定听说过《精灵宝可梦 Go》。而且，你可能还听到过支持和反对这种现象的激烈争论。但是我们如何用这个小游戏来学一点数学呢？

自从《精灵宝可梦 Go》于 2016 年推出以来，它真的成了一种社会现象，这一点毋庸置疑。这个应用打破了所有下载纪录，玩家还围绕游戏组织了聚会。当它仅仅在 6 个国家和地区上架时，它产生的流量就超过了所有的 Twitter 流量。

每当类似的现象出现时都会有许多批评的声音。老实说，我不认为分散注意力会伤害任何人，特别是还要走很远的距离的话。它可能不是最好的消遣，但生活并不仅仅关于学识，做一些不伤害任何人的事情让自己快乐，在我看来似乎值得称赞。此外，也算搭上它成功的便车，我想提出一些介绍数学的想法，包括应用设计和享受游戏。

如果你玩过这个游戏，你就会知道我们的手机要做的第一件事就是要利用它内置的全球定位系统（以下简称 GPS）来定位。为此，GPS 要



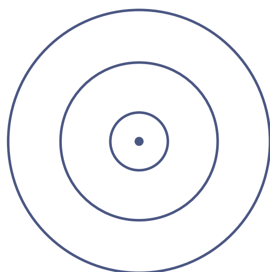
计算 4 个或更多球面（比游戏中的精灵球要大得多）的交叉点。

它的思想是，卫星发出的信号让我们能够计算捕获信号所需的时间差。只要知道传输速度（光速），我们就可以计算与每颗卫星之间的距离，而且它们的位置是已知的。这将我们置于以每个卫星为中心的球面上，计算其中 4 个球面的交点，就可以准确地知道我们所在的位置。

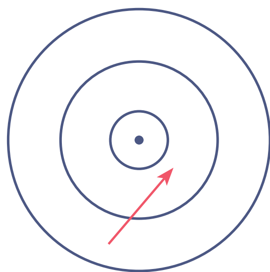
在撰写本文时，说到位置和距离，怎样才能知道在哪个方向上能找到宝可梦并不显而易见。我们只知道它与我们的距离有多远，它在以我们为中心的圆周上的任何一个点上，圆周的半径就是我们与宝可梦的距离。

但是，我觉得就像你怀疑的那样，利用数学就可以准确地知道珍贵

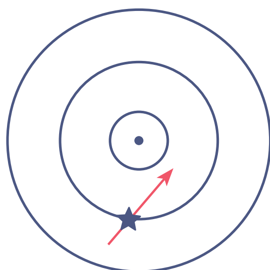
猎物的方向。设想如下：当手机的雷达检测到宝可梦时，它会画线告诉我们距离小怪兽有多远。我们假设 3 条线意味着 300 米以上，2 条线意味着 200 米以上，1 条线意味着 100 米以上。如下图所示：



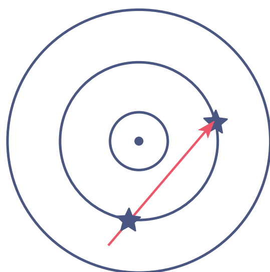
假设我们处于一个显示 3 条线的地方，出发。如果我们看不到 3 条线了，那显然我们应该转过身来；如果我们没有在相反的方向上进入 2 条线区域，那么我们用下面的方法进入 2 条线的区域。因此，我们可以假设，如果出发，我们就会进入 2 条线的区域：



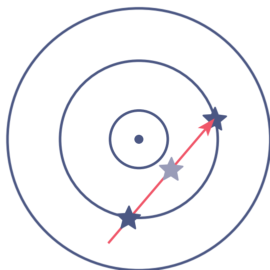
如果到达了 1 条线的区域，那我们就几乎抓到宝可梦了，所以我们假设永远不会到达 1 条线的区域。我们要做的是，记住从 3 条线到 2 条线的点，并用星号标出来：



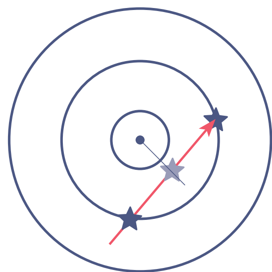
我们继续往前走，就像前面所说的，假设我们不会进入 1 条线的区域。在这种情况下，我们会离开 2 条线的区域，重返 3 条线的区域。我们用星号标记这个点：



大致计算两颗星之间的中点：



在那个中点，我们转 90 度，精灵宝可梦肯定会出现在那条线上：



它自然也可能在相反的方向上，如果是这样，我们回到 3 条线的区域，转身往反方向走就可以了。

当然，只有在地图上没有标出宝可梦的位置时才需要做这些。但是很多地图上都标出了宝可梦的位置。比如，下面就是一张巴黎的局部地图：



在这种情况下，我们可以思考，如何找到一条最优路线，尽可能少走路并经过所有兴趣点。不幸的是，这是一个非常复杂的问题，被称为

“旅行商问题”，我们已经讨论过了（见第 6 章）。但是，有些算法可以提供近似解决方案，另一些算法还可以提供精确的解，但计算时间却要长得多。例如，有人计算了美国几座城市中的最佳路线。（然而，大多数城市并没有添加所有兴趣点，因为此类计算非常困难。）

到目前为止，我们已经看到如何使用《精灵宝可梦 Go》来学一点几何（以及旅行商问题中的组合和计算）。但是游戏中也会出现概率和分数。实际上，场地战斗部分取决于每个宝可梦的战斗力（CP 值），因此我们可以计算出某个宝可梦胜出的概率（V_1）（当然，还有其他因素）：

$$V_1 = \frac{CP_1}{CP_1 + CP_2}$$

其中 CP_1 和 CP_2 是对阵的两个宝可梦的战斗力。如果你愿意，我们可以在课堂上利用它复习分数并进行比较，以设计最佳战斗策略。

最后，我想指出，该游戏的所有版本中的距离都使用公制单位，所以，在英制更为常用的美国，有些城市利用这个游戏来让孩子们熟悉公制。

有趣的是，你不会反过来对我说，美国人会因为精灵宝可梦而转向公制系统。你看，《精灵宝可梦 Go》带给我们几何、组合、信息技术、概率计算……

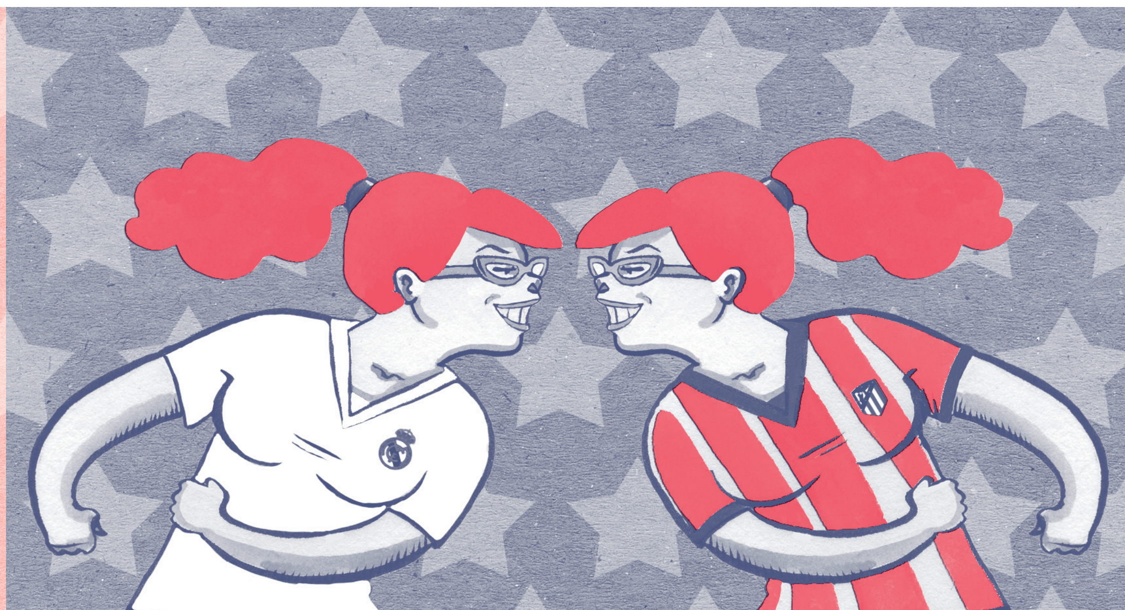
它们就在那儿，离你很近，一个都不要放过！

13 皇家马德里对战马德里竞技：谁会赢？

2014 年，欧洲冠军联赛经历了一场历史性的决赛：来自西班牙首都的两支球队，马德里竞技队和皇家马德里队，在葡萄牙里斯本的光明球场相遇。这场比赛非常紧张，所有西班牙人，哪怕平常不看足球的人，都试图预测比赛结果。数学家也不例外。

那时，由于章鱼保罗已经往生，要预测这场比赛的结果，我们有必要求助于另一种类型的推理。虽然你已经知道结果（塞尔吉奥·拉莫斯设法在最后一分钟扳平将比赛拖入加时，而他所在的皇家马德里相对轻松地获胜），我们还是会提出一些尽可能客观，既不倾向“白衫队”（皇家马德里）也不倾向“红白军”（马德里竞技）的论据。

在本书的第 43 章中，我们将要介绍哈维尔·洛佩兹·培尼亚和雨果·图谢特关于 2010 年世界杯的文章。在这篇文章中，他们使用了图论，衡量每名球员的接近中心性、中介中心性和人气中心性的函数，用图代表球队，并分析球队在面对对手时获胜的可能性。通过这种方式，他们曾预测西班牙队在决赛中战胜荷兰队，但对于咖啡馆里的朋友（或“敌人”）之间的聊天来说，这仍然太复杂了。



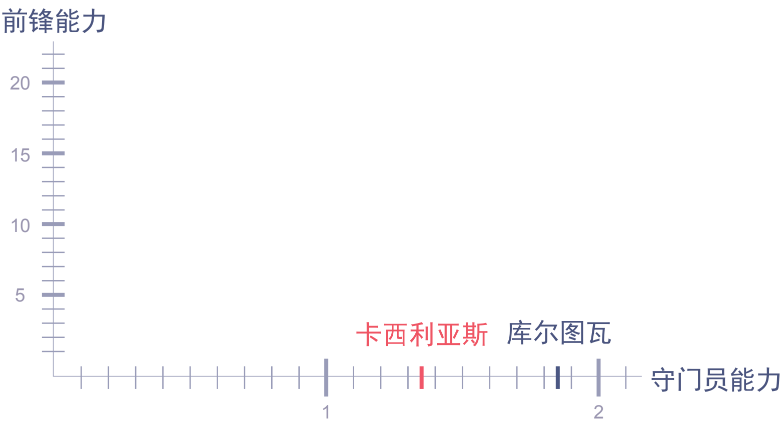
在通常情况下，事前分析不会那么精细，并且基于更容易衡量的标准。但是，我们该用什么标准来衡量“白衫队”与“红白军”的实力呢？坦率地说，目前尚不清楚，如果你问任何一支队伍的支持者，他都会选择最适合的人来预测他支持的球队胜利。数学家称这种现象为“帕累托最优”。

什么是帕累托最优？简而言之，它可被概括为若干不同的最优值（在我们研究的这个例子里，就是最有希望赢得冠军联赛的热门球队），它们之间没有可比性，因为没有一个队比其他队更好。拓展一下，在经济学、工程学或社会科学中，所谓的“帕累托改进”就是某个方面得到改善，而其他方面不会被损害的情形。如果你到达一个点，不能在改善任一方面的同时不损害另一方面（不可能再进行帕累托改进），那么你就处于帕累托最优状态。

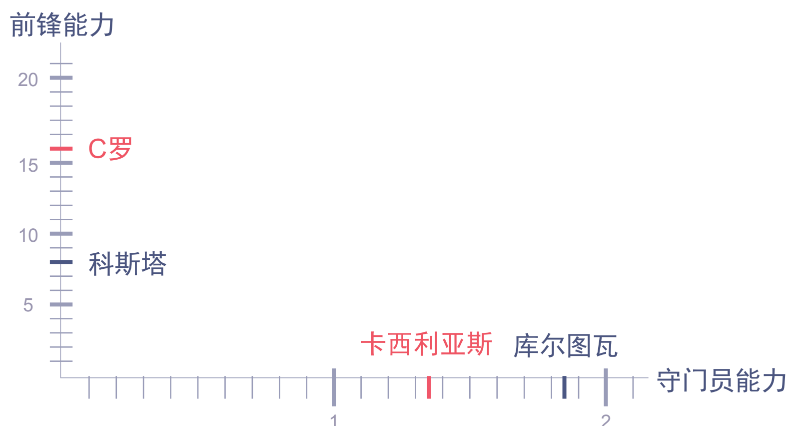
我们试着用冠军决赛的例子解释它吧。想象一下，我们在赛前问马德里竞技队的球迷，哪支球队获胜的可能性更大，他的回答是他喜爱的球队，因为来自比利时的蒂博·库尔图瓦是世界上最好的守门员。再想象一下，在同样的谈话中，皇家马德里的球迷声称他支持的俱乐部中有葡萄牙人克里斯蒂亚诺·罗纳尔多（人称“C罗”），而且他比迭戈·科斯塔更会射门，因为他得过很多奖，光金球奖就拿过两次。你看出来了吗？我们这就是在拿不同的衡量标准比较。

如果我们把这两个标准结合起来呢？如果我们想用这两个标准对决赛结果进行更严格的预测，那么我们试着把这两个标准——守门员和明星前锋画在图上，并评估哪支球队获胜的可能性更大。来吧。

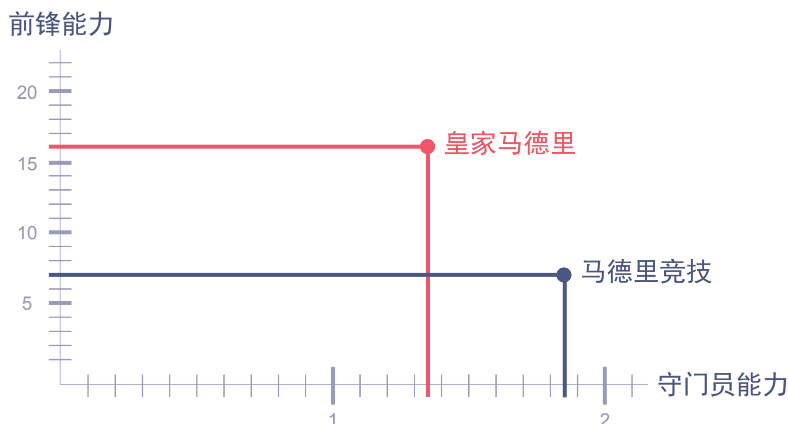
我们用横轴表示衡量守门员能力的标准，例如，将那一年的冠军联赛中的比赛数除以失球数（这样做是为了让失球更少的守门员在图中得分更高，因为守门员的能力与失球数成反比）。对于蒂博·库尔图瓦来说，他在 11 场比赛中丢了 6 个球（因此我们给马德里竞技加 1.83333 的守门员得分），而伊戈尔·卡西利亚斯在参加的 12 场比赛中丢了 9 个球（皇家马德里得分为 1.33333）。我们把这些数据标在图中。



现在我们使用欧洲冠军联赛中的进球数来衡量主要球星的能力，并将进球数直接标在纵轴上（因为前锋的能力与进球数成正比）。

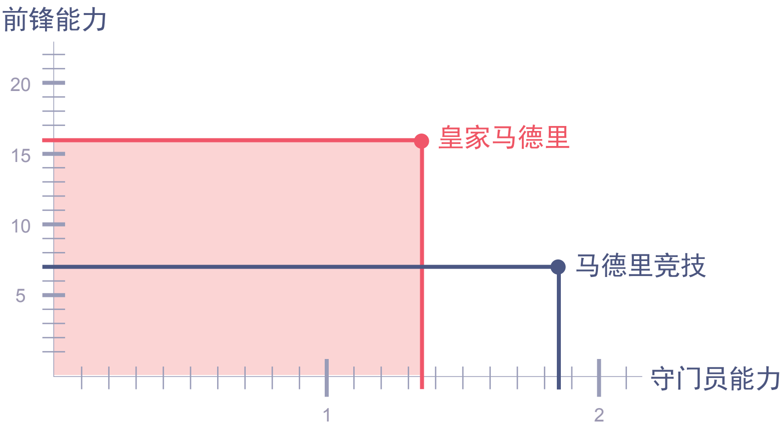


接下来，用这些坐标为每个队分配图上的一个点。

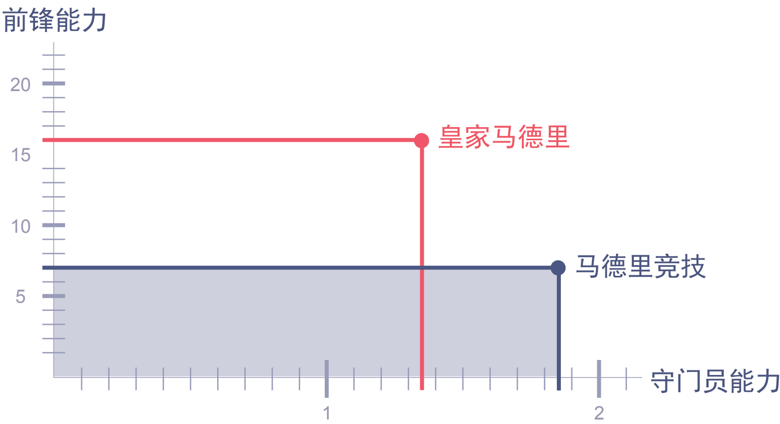


哪个队更好？没有哪个队更好。如果一个队在图上形成的矩形横向更长，那就说明它有更好的前锋；如果另一个队形成的矩形更粗，那就是因为其守门员更好。这就是我前面提到的帕累托最优。只有与坐标位

于红色阴影矩形内的球队相比时，皇家马德里才是更好的球队：

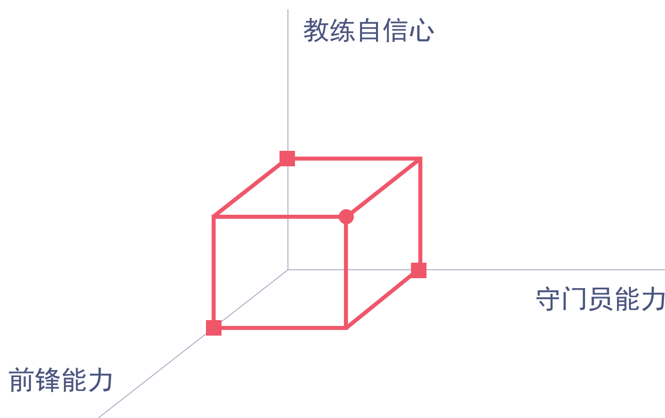


然而马德里竞技比任何坐标位于蓝色阴影矩形中的球队都要好：



但这两者之间没有更好，两者都是帕累托最优。如果我们想再加上一个标准来比较两支队伍，我们就不能用影响力矩形（如红色阴影代表皇家马德里，蓝色阴影代表马德里竞技）来表示，而必须用 3 个维度，得到一个影响力平行六面体（三维盒子）：如果一个队在另一个队的影响力盒子里，那就说明后者更优。我们也曾尝试衡量教练的自信心，但

我们后来放弃了，因为这不具有相关性：一名教练是意大利人，另一名是阿根廷人。



回到帕累托最优，这种情况（无法有效比较）在如果拿一个数据来和另一个数据相比较，或拿我们自己的数据和另一个时期比较时就会发生。例如，就拿失业人数来说，每个人都会举出最适合自己的数据来证明自己的理论，其中一个数据是官方登记的失业人数，另一个数据是领取失业保险金的人数（对我来说更重要）。但在我看来，这种策略的最明显的例子，就是用最有利于我们的数据进行测量，我们不会在下一场比赛中看到这一现象，但当政党分析各自的民意调查结果时，我们会发现，没有人输。这真是伟大的艺术，不是吗？

说回体育场的聚会，我们还得等上几天，看看到底是西贝莱斯喷泉的狮子——皇家马德里，还是海神雕像的马——马德里竞技能够摘得桂冠，看到球迷庆祝那个备受瞩目的奖杯到达马德里。

后记

感谢我的孩子萨尔瓦多和本图拉告诉我关于两队的数据，我得承认，我对足球的兴趣确实不高。

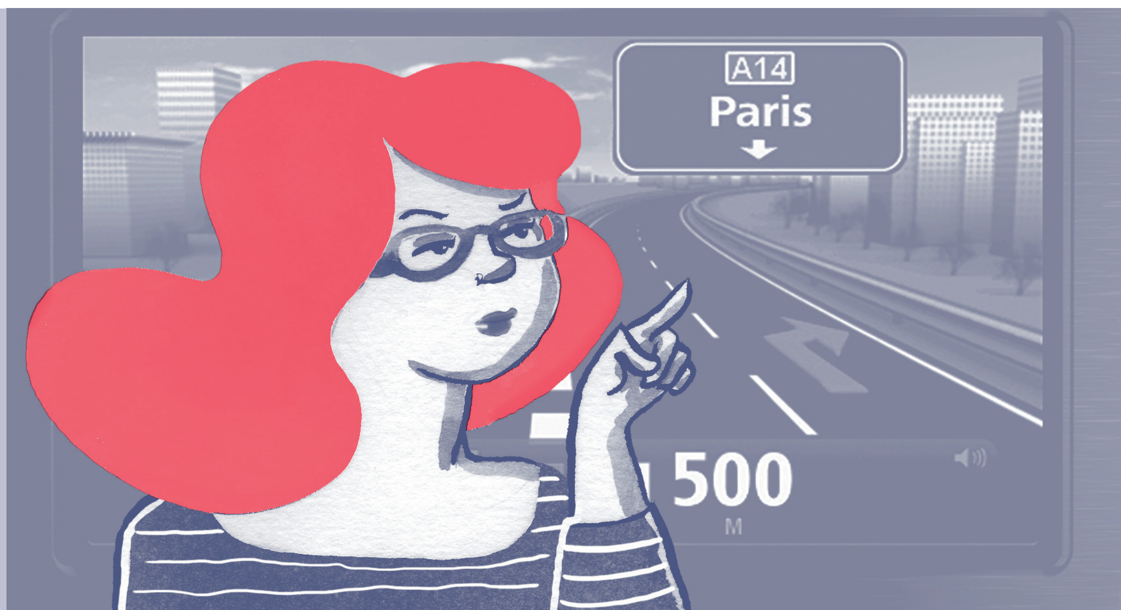
14　GPS 需要几颗卫星才能找到你？

我们已经习惯了用智能手机来寻找地址，看看怎么去一个地方最方便。这对我们来说似乎很自然。不，其实不是的。自然的做法应该是问当地人，问路有它的魅力。你知道全球定位系统（GPS）是如何工作的吗？它是如何找到我们的？不，没有人随时看到一切：这里用的是几何知识，大量的几何知识，还有大量的工程学知识。

我很确定，大多数 GPS 用户会怀疑，这个能在地球上任何地方近乎精确地定位我们的小机器与人造卫星有关。事实确实如此。

GPS 最初由 24 颗卫星组成（人们已经发射了 60 多颗卫星，在 2014 年 6 月已有 31 颗卫星投入运行），并为美国政府所有。或许，你是否知道，你的手机不仅能够检测到 GPS 的卫星，还能检测到俄罗斯格洛纳斯系统（GLONASS）的卫星，这是个偏好问题。

现在的问题是，卫星如何能每时每刻知道我们的位置？答案其实挺简单。每个卫星的位置是已知的。因此，当我们用手机探测卫星时，设备的时钟和卫星的时钟会进行同步，我们可以测量信号从卫星到达手机所需的时间。既然知道信号以光速传播，我们就可以确定每个发送信号的卫星离我们有多远。你明白了吗？

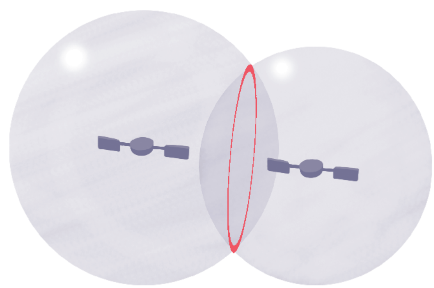


也就是说，当检测到卫星时，我们会告诉它我们离它有多远。但卫星还不足以凭此知道我们在哪里。因为，如果有人告诉我们，他距离我们 100 米，我们就知道他在周围距离我们 100 米的地方。换句话说，我们位于半径为 100 米的圆的圆心，而这个人位于圆周上。

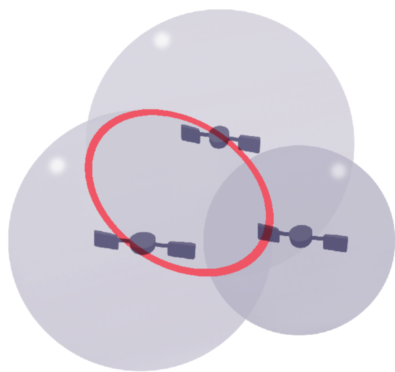
理论上说，我们知道的是那个人在以我们为中心，半径为 100 米的球面（三维）上。然后，因为你知道另一个人也在地球上，所以你会取这两个球面——地球（虽然它不是一个球体）和半径为 100 米的球体的交线，这样就得到了一个圆。

这样看来，只有一颗卫星是无法定位的，所以我们需要更多的卫星。那到底需要几颗呢？让我们暂时忘记自己在地球上吧。如果我们与一颗卫星同步，就相当于被放置在以该卫星为中心的球面上，其半径是

我们与卫星的距离。如果我们与两颗卫星同步，由于每颗卫星都会把我们放在一个以卫星为球心的球面上，那么你可以推断出我们处于两个球面的公共区域。在这种条件下，两个球面的交线是一个圆周。



所以我们还需要更多的线索，因为这个圆周可能大得不得了。如果我们再与另一颗卫星同步，它会把我们放置在第三个球面上（以它为球心，半径为我们与它的距离）。那么，这些卫星就会知道我们处于 3 个球面的交叉点上。这时，3 个球面的交点有两个。只有两个，我们已经接近了。



如果像我们之前所说的那样，我们认为自己在地球上，那么只需选择两点中位于地球上的那个交点就足够了。但这样不行，因为，我们不知道自己所处位置的海拔有多高。为了进一步确定我们的位置，并消除 GPS 时钟和卫星之间同步的故障，它至少使用了 4 颗卫星（第四颗卫星用于排除 3 个球面的 2 个交叉点中不符合我们位置的一点）。这样我们就几乎完全确定了自己的 3 个坐标：纬度、经度和高度。

我们就说到这儿吧。你可以用 GPS，也可以问当地人，但你不要迷路。你随时都可以在这里找到我。

后记

我是在听到西班牙加泰罗尼亚理工大学教授费兰·乌尔塔多去世的消息之后写下的这篇文章。我的朋友费兰是西班牙计算几何领域最重要的人物之一。能够帮助像我这样容易迷路的人的 GPS 还没有发明出来。我只想用这几句话表达对他的崇敬和感激：他是我最喜欢合作研究几何的人之一，而且我非常爱戴他。我会想念你的，费兰。

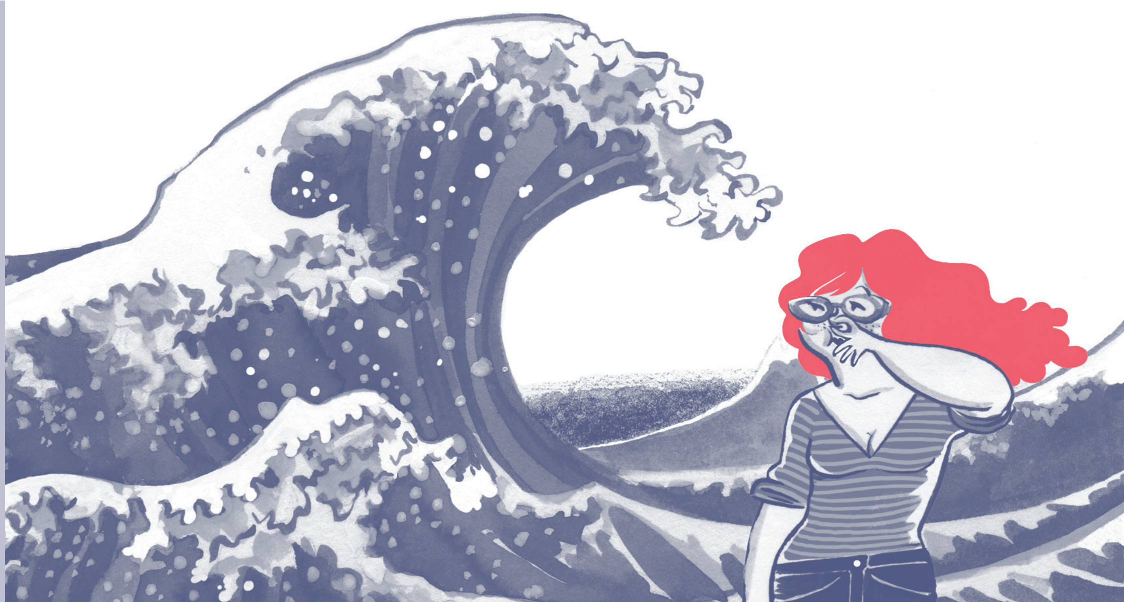
15　为什么海啸对海岸冲击更大？

虽然海啸在公海上移动得更快，但它在海岸上更加致命。数学有助于解释这一现象。

我们都看过电影《海啸奇迹》中 2004 年圣诞节期间印度洋海啸的可怕图景，或关注过 2011 年日本的海啸。我们都知道，如此大规模的海啸起源于海上产生的地震，但这就引出了许多问题：震中位于海中的所有地震都会产生海啸吗？它以什么速度传播？它能达到多高？

第一个问题的答案是“否”，另外两个的答案是“看情况”。我们来看看吧。首先，海啸发生的一个条件是，海水必须移动。当地震导致海底发生垂直移位时就会发生这种情况，迫使海水移动以适应海底的新地形。换句话说，如果没有发生这种垂直移位，例如两个构造板块相对发生水平移动，则不会产生海啸。

当然，海啸也可能由陨石冲击引发。（陨石坠落在尤卡坦半岛附近，导致恐龙灭绝，人们猜想它产生了约 100 米高的海浪，而且这还不是最



大的一次海啸。）

一旦海啸发生，我们是可以算出来海浪行进的速度的（该点的海洋深度与重力加速度乘积的平方根，也就是 $v=\sqrt{gh}$ ）。这意味着，在公海上，海啸会以超过 600 千米每小时的惊人速度前进。如果你在公海上，而海啸冲着你扑过来了，那可真是插翅难飞啊。

那么，你可以做些什么来逃脱呢？有趣的是，没有，你什么也不需要做：这是海啸危害最小的情况，因为虽然它以这样快的速度前进，但波峰之间的距离也很大，甚至可达数百千米，而波峰的高度可能只有 1 米，所以没什么大不了的。

相反，当它接近海岸时，情况开始发生变化。首先，根据我们之

前提到的公式计算，海浪速度下降很多，通常小于 100 千米每小时。其次，一个重要的现象出现了，海啸的能量开始消散。事实上，虽然公海上的波峰高度非常小，但由于波峰之间的距离非常大，而且海浪移动速度如此之大，海啸的能量是巨大的。当海啸接近海岸，波浪开始破碎时，大部分能量都消散了。好消息就这么多了，其他都是坏消息。

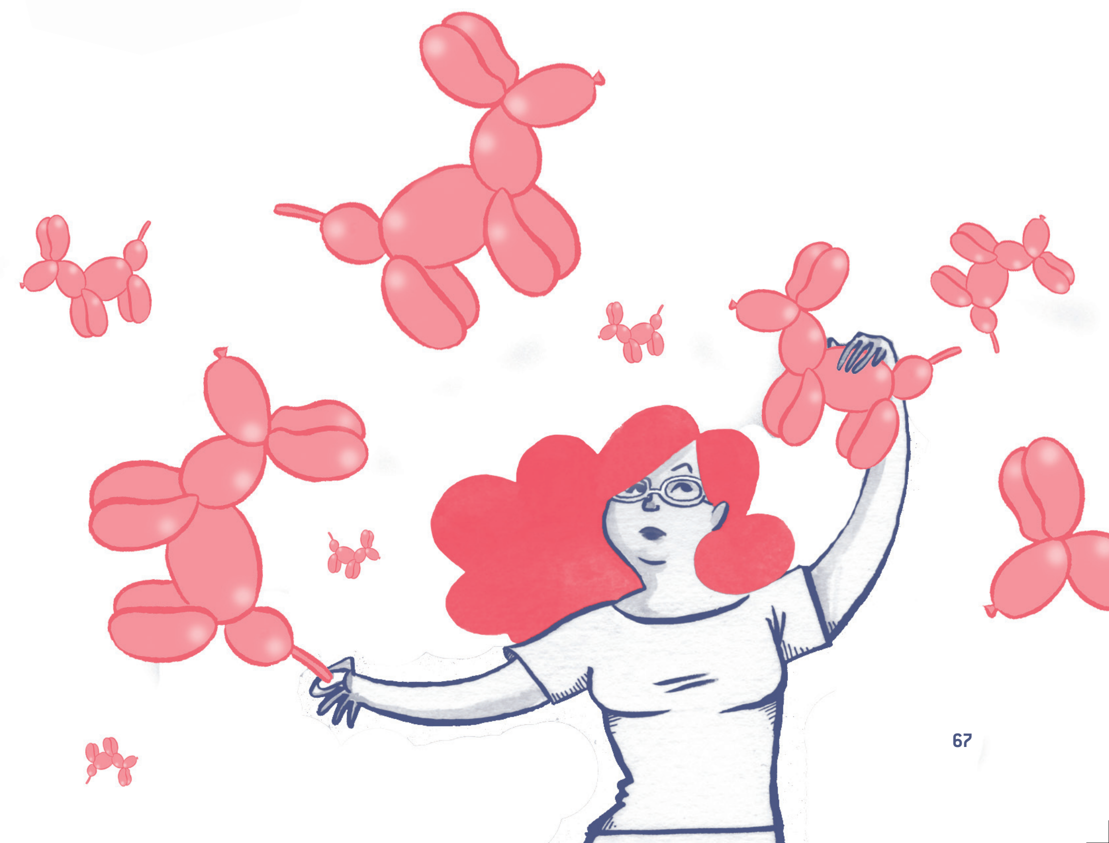
虽然接近海岸时海浪速度大幅下降，但是波峰之间的距离也大大缩短，这意味着两个波峰之间（可能相距数百千米）的水被压缩在仅仅数十千米中，导致波峰的高度增加 10 倍，有时甚至还要多得多。因此，我们会看到一堵由巨量的水构成的高达 10 到 20 米的庞大水墙，以大约 100 千米每小时的速度接近海岸。

幸运的是，当海啸接近海岸时，它通常不会破碎（除非海啸非常高），这导致它在大部分时间就像上升流的海潮一样涌上海岸，留给人逃脱的时间。

所以我得提醒你啦，如果你怀疑海啸即将到来，而且观察到一些可疑现象，比如海水退离海岸或海平面降低，那你就应该逃往内陆或前往公海，但**绝不要**靠近海滩，哪怕是穿着游泳衣、套着救生圈也不行。

16　用气球制作小狗

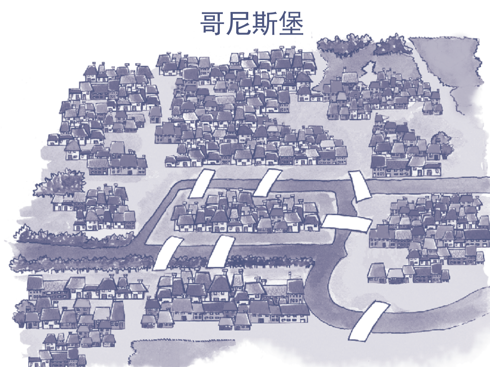
你是不是和我一样对气球雕塑着迷呢？但是不是扭一扭气球就能做出任何物体呢？这就要靠哥尼斯堡七桥问题来找答案了……



不是只有小孩子才会对那些能用细长的气球做出小狗、小船和各种各样东西的人着迷，有人把这种艺术称为“气球雕塑”。显然，为了让全世界眼前一亮，你需要技术（不要把气球挤爆）、一点优雅（就像跳邦巴舞），你还需要数学。事实上，这些可爱的形象背后有许多数学知识，有趣的是，它与今天一个非常高产的学科——图论提出（和解决）的第一个问题有关。是的，同样的理论刚刚警告我们，你的社交网络主页在欺骗你，它还帮助我们解释关于疫苗的数学问题。

该理论还可以用在邮递员或垃圾车的路线设计上。总而言之，瑞士数学家莱昂哈德·欧拉在 1736 年解决了哥尼斯堡（今俄罗斯加里宁格勒市）居民提出的问题。该城市位于普列戈利亚河口，那里有 7 座桥，如下图所示：

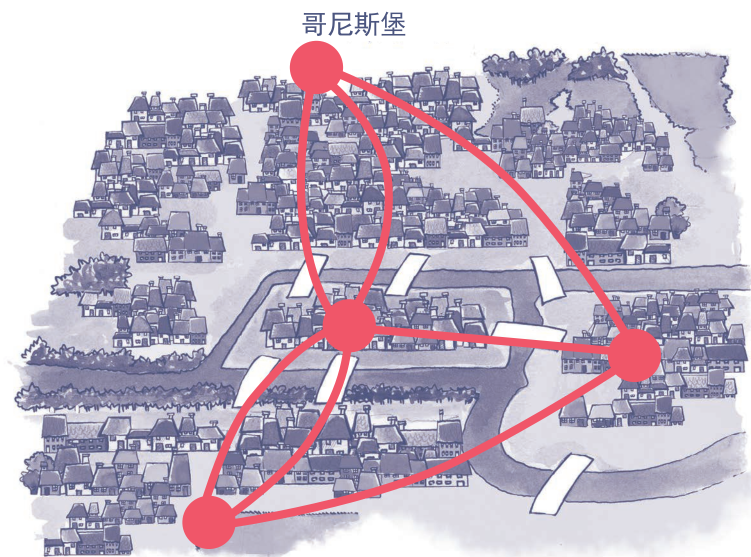
哥尼斯堡



那个时候，有人提出这样一个问题：从哥尼斯堡市的任何地方出发，是否有可能选出一条路线，让我们在普列戈利亚河的 7 座桥上各通过一次？这个问题被称为“哥尼斯堡七桥问题”。欧拉给出的解答让我们能够找到另一个更常见的问题的答案：笔尖不离开纸，能画出什么样的图形？

欧拉的答案非常简单：可以一笔画出的图形由连接点（我们称之为

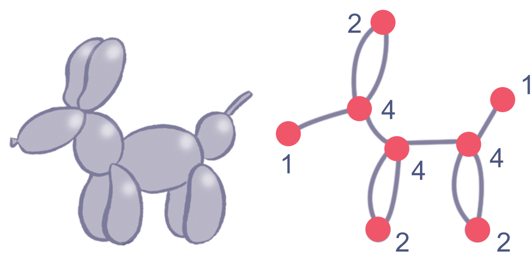
“顶点”）以及这些点之间的线（我们称之为“边”）构成。好吧，不把笔从纸上抬起来的话，我们可以画出这样的图形，即除了可能的两个顶点之外，每个顶点都会连接到偶数条边。因此，他得出结论，哥尼斯堡七桥问题没有答案，因为多于两个顶点具有奇数条边。实际上，哥尼斯堡图的所有顶点都有奇数条边。



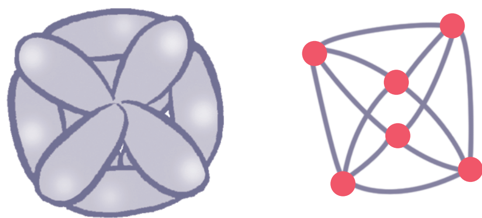
现在，我们把这些有顶点和边的图形称为“图”，并把所有顶点都有偶数条边的图称为“欧拉图”，以纪念欧拉。是的，就是那个写出了“世界上最美等式”[①] 的欧拉。但是，气球和它能做出什么形象有什么关系？别急别急。

把图与用气球做成的雕塑联系起来是非常容易的：我们把气球拧死并与另一部分连接起来的地方就是顶点，顶点和顶点之间那部分气球就是边。

① 指欧拉恒等式 $e^{i\pi}=-1$。——译者注



（气球）典型小狗



（气球）八面体

你可以验证是否可以用气球制作某个雕塑，当且仅当得到的雕塑最多有两个连接到奇数条边的顶点（比如气球的两端，它们可以连在一起或连到另一个顶点）。如果我们看一下用气球做的典型小狗，就会看到小狗对应的图实际上只有两个边数为奇数的顶点：嘴和尾巴。

马丁·德曼（父）、埃里克·德曼（子）和年轻的外·哈特（三位都是美国人）研究了这些模型，并共同发表了一篇文章[1]。他们的文章中给出了更多更有趣的问题。例如，假设无法用单个气球完成雕塑，那需要多少个气球呢？再次计算具有奇数条边的顶点就可得出答案：如果这样的顶点的数量是 p（可以证明 p 总是偶数），则所需的气球数量将是 $p/2$。

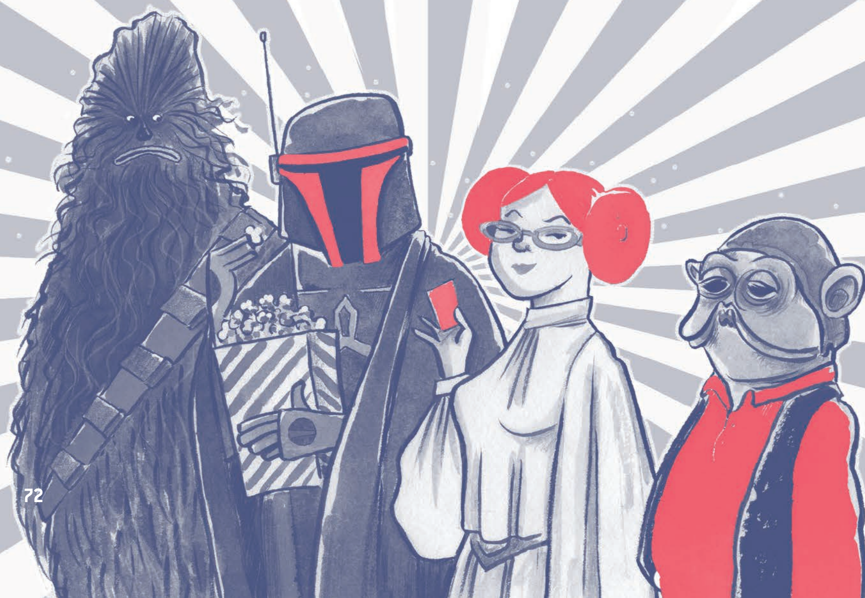
① Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, V. Hart, *Computational Balloon Twisting: The Theory of Balloon Polyhedra*.

从数学的角度来看，上面提到的两个问题虽然很奇怪，但仍然非常简单，所以马丁、埃里克和外·哈特的工作还包含其他复杂得多的结果。例如，他们提出如果限制顶点之间的部分长度和气球的总长度，还能否做出一个雕塑。从这个意义上说，他们证明，哪怕用计算机来解决这些问题也会非常复杂，因为它们属于所谓的“NP– 完全”问题。这类问题与今天数学和计算领域最著名的开放性问题密切相关：P 对 NP 问题。这是克雷数学研究所提出的千禧年问题之一，解决者可获得 100 万美元的奖金。

所以我可提醒你了：也许扭扭气球你就能解决一个价值 100 万美元（而且还会世界闻名）的问题呢。

17 在电影院前排队的最佳位置

在电影院门口排队，与进入华尔街的选拔考试之间有联系。有点惊讶，是吗？



世界上发生的大部分事情，是由某些控制华尔街的大脑决定的。我想，对其中很多人来说，成为在那里工作的“一匹狼”在某种意义上代表其职业生涯的巅峰。自然，要进入一家顶级公司，你在获得职位前要回答的问题通常很难，而其中许多问题涉及很深的数学内容。

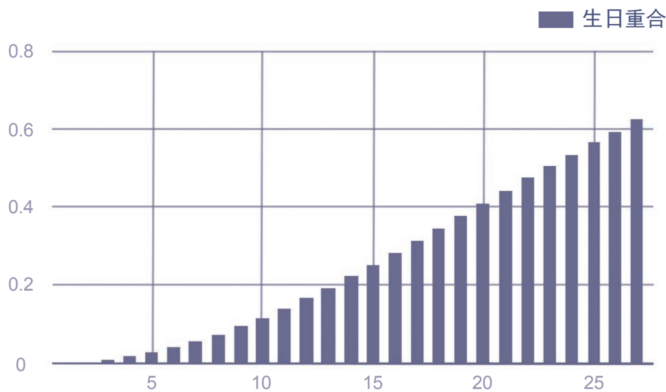
前几天我在电影院门口排队，想起来最大、最强的公司之一摩根士丹利为测试候选人提出的一个谜题：“一群人正在电影院售票处排队。影院老板说，每个人都可以改变自己的位置，但第一个与前面某个人生日相同的人可以免票。如果让你选，你会站在哪里？”

从某种意义上说，这个有趣的问题让我们想起另外一个问题——生日悖论。还记得生日悖论吗？在一组 N 个人中，至少有两个人生日为同一天的概率是多少？要计算这个概率，计算其对立事件要容易得多，即没有生日重合的概率是多少？

如果有两个人（$N = 2$），他们的生日不在同一天的概率（不考虑闰年）是 364/365，几乎是 1。回想一下，概率是介于 0（肯定不会发生）和 1（必然发生）之间的数。如果有 3 个人，你必须把概率相乘，得到 $(364\times363)/(365\times365)$。

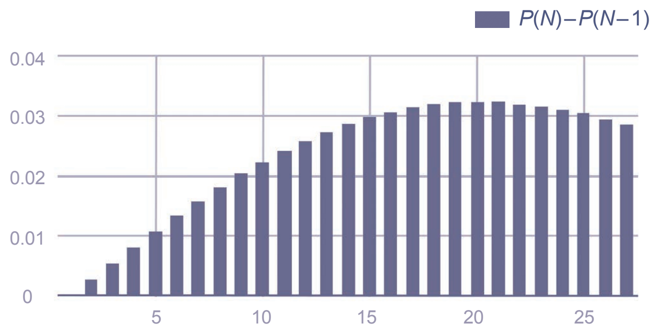
一旦得到了没有生日重合的概率，要计算它的对立事件的概率，只要用 1 减去它就可以了。如果我们用 $P(N)$ 表示一组 N 个人中至少有两个人生日相同的概率，就可以得到 $P(1) = 0$，$P(2) = 1 - (364/365)$，$P(3) = 1 - (364\times363)/(365\times365)$。

将这个概率用图表示：



引人注目的一点是，只要 25 个人，有两个人生日是同一天的概率就超过了 50%，这个悖论就是这样。但我们追求的并不是概率。为了免票看电影，你需要在队列中占据这样一个位置：有两个人生日重合，但不要在你之前重合，也就是要确保第一个生日重合的人就是你自己。因此，我们对每个位置 N 追求的概率是 $P(N)-P(N-1)$，其中 $P(N)$ 是在前 N 个人中出现生日重合的概率，而 $P(N-1)$ 则是在你的位置（N）之前出现生日重合的概率。

利用前一张表进行计算之后，我们就可以列出这个函数：



好吧，我们可以发现，把自己排在第 20 位时，这个函数就取得了最佳值，这个概率是 0.03231985755。虽然概率并不大，但它是最优的。说到底，我们在意的并不是免票看电影，而是成为“华尔街之狼”或股票市场的“绝地武士”。

我差不多确定数学对于“绝地武士”来说也是有用的，如果说“数学就是原力”那就更好了。

18　如何借助骰子来投资股票

有时候，或者说很多时候，我们不知道是该对自己拥有的东西感到知足，还是应该冒一点风险来多赚一点。如果你有意投资股市的话，这个有点愚蠢的游戏也许可以帮到你。

成年人的生活有一点不好，就是我们需要不断做出让自己的情况变好或变坏的决定。问问那些政治家你就知道了。

我们来玩个小游戏吧，反正不会有什么损失的，对吧？假设有人提议我们玩这样一个游戏，要支付 12 欧元才能玩：“扔一个二十面体骰子，其 20 个面分别从 1 到 20 编号。然后你可以选择收取与骰子显示的数字一样多的钱，或再付 1 欧元再扔一次（重新开始）。”

我来解释一下：如果你选择支付 1 欧元再扔一次，这就好像你回到初始状态（但少了 1 欧元），然后你可以再次在这两个选项之中选择。什么时候最好拿钱走人，什么时候应该继续玩呢？

很明显，能够发生在你身上的最好的事，就是第一次就扔出 20，这是最高利润。但其他情况呢？让我们来分析一下。虽然这是一个简单



的骰子游戏，但奇怪的是，分析这个简单情况，对于理解股票市场等现象的动态至关重要。实际上，在股市里，我们每时每刻都必须做出一系列与这个游戏非常类似的决策。我们必须决定是否值得继续下注并重新掷骰子，或最好还是停下来并兑现利润（或损失）。

那么让我们看看这个游戏是怎么玩的。我们的分析需要考虑两个初始元素。第一个可能看起来有点违反直觉：在每一刻，我们都应该尝试让利润最大化，因此之前发生的事情毫不重要。换句话说，决定是否继续，应只取决于我们刚刚扔出的骰子的结果，而不依赖于到目前为止投入（损失）的资金。

第二个元素稍微复杂一点，但不那么违反直觉。让我们从最简单的情况开始分析：如果我们掷骰子得到 20，就像前面说过的那样，我们

应该停下来并兑现 20 欧元，因为未来不会得到更好的收益（未来可能发生的最好的事情是下一次又扔出 20，但这意味着我们将拿到 19 欧元而不是 20 欧元）。

但如果我们扔出 19，我们也应当停下来拿钱，因为如果继续游戏，那么我们能遇到的最好的事情就是下一次扔出 20，而收益是一样的；如果我们扔出 18，接下来要怎么办就不那么明确了。

基于到目前为止所说的一切，我们可以确定分析中的第二个要素：应该存在一个理想值，也就是一个阈值——如果数超过这个阈值，我们就停下来；如果数低于这个阈值，我们就支付 1 欧元并继续游戏。所以我们要找到这个阈值。

警告：这里要变得复杂了。接下来需要许多数学工具：方程式，甚至导数。但是你不需过于恐慌，接下来的计算还相对比较基础。假设阈值是 U，试着算算如果应用这个阈值（也就是说，在扔出大于 U 的数时停止游戏，否则继续游戏），我们可以预期获得多少收益。

当然，为了简化分析，我们不用考虑最初的 12 欧元了：如果上面的期望值大于 12 欧元，那么这个游戏就值得玩，否则就不值得玩。好了，基于阈值的期望可以通过以下方式计算出来：我们用 E 来表示阈值 U 下平均赚取的金额。如果我们得到的数小于或等于 U（概率为 $U/20$，有 U 个可能的结果小于等于 U），我们期望赢得的金额是 $E-1$ 欧元（因为我们必须继续玩）。

但是，如果我们得到大于 U 的数（概率为 $(20-U)/20$），那么因为这个数可能是 $U+1$ 到 20 之间的任何数，期望恰恰就是 $U+1$ 和 20 的平均值，也就是 $(20+U+1)/2$。因此，当我们设定阈值 U 后，收益的期望（将在各种情况下得到的值乘以概率，再求和）是：

$$E=\frac{20+U+1}{2}\cdot\frac{20-U}{20}+(E-1)\cdot\frac{U}{20}$$

好了，最麻烦的已经搞定了。在这个方程中，我们只要求出 E 就好了：

$$E = \frac{420 - U^2 - 3U}{40 - 2U}$$

现在我们可以采用两种方法：一是求导来计算函数的最大值；二是把 1 到 20 代入 U，找出 E 取最大值时对应的 U 值。当然，这两种方法最后的结果是一样的，最佳阈值是 $U = 14$。也就是说，如果扔出 15 或更大的数，我们就拿钱走人；如果扔出 14 或更小的数，我们就付 1 欧元继续玩。

如果 $U = 14$，游戏的期望收益是多少？用前面的公式就够了，我们可以得出对于 $U = 14$，$E = 15.167$（事实上，$E = 15 + \frac{1}{6}$）。这意味着，我们值得支付最初的 12 欧元来玩，期望收益（如果我们使用上述获胜策略继续玩，直到扔出 15 或更大的数）是 15.167 – 12 = 3.167 欧元。这很不错了：收益接近投资价值的 28%。

好啦，你已经准备好投资股市了。入市需谨慎。

19　鸽子、头发和一排椅子

你觉得马德里会有两个人的头发数量完全相同吗？有，我非常肯定。不，我并没有兴趣去数马德里所有人的头发，至少现在还没有。但利用鸽笼原理就可以推断出这一结论。

在数学中，就像在日常生活里一样，有些事乍一看似乎更小，微不足道，却能产生深刻而持久的结果和（或）满足感。如果把优安·曼努埃尔·色拉特[①]的歌发挥一下，这些小事没有留给我们玫瑰的时代，却带来了 19 世纪的德国数学家约翰·彼得·古斯塔夫·勒热纳·狄利克雷。我今天要说的就是鸽笼原理。

什么保证了这一原理成立呢？这很显而易见：如果你的鸽子比鸽笼多，那么肯定有一个鸽笼里有不止一只鸽子。这是我说的。我想别人也想到这一点了："嗯，我们德国人也毫不费力地发现了这一点……"行吧，就像我说的，这个特性显而易见，但普遍被接受的观点是，它是由古斯塔夫·狄利克雷在 1834 年首次正式提出的。我想那应该是个早上。

① 西班牙著名歌手。——译者注



事实上，如果你的鸽子数超过了鸽笼数，那某个鸽笼就得被塞入多于一只鸽子，很多人早就注意到了这一点。但是，如果我们专门拿出一章来讲它，那是因为，正如开头所说的，可以从这个原则推断出多种多样的结果。我们来看几个吧。

我们还是从鸽子和鸽笼的例子开始吧：很容易理解，如果你有 10 只鸽子和 3 个鸽笼，那么肯定有一个笼子里的鸽子不超过 3 只。为什么呢？因为如果 3 个鸽笼都有至少 4 只鸽子，那就需要 12 只鸽子。

在一般情况下，如果我们把 n 个物体放到 3 个盒子里，总有一个格子里面最多只有 $n/3$ 个物体（如果 $n/3$ 不是整数，我们就去掉小数，只保留整数部分）。也就是说，如果我在 3 个盒子里放 100 个物体，那么总有一个盒子里的物体不超过 33 个（否则，每个盒子都有 34 个或更多

物体，总数就超过了 100 个）。反过来，这个显而易见的属性（3 个盒子或 3 个鸽笼）可以应用于美术馆的看守问题。

对于更日常的事情，鸽笼原理让我们能够确认，比如在马德里，至少有两个人头上的头发数量相同。事实上，如果我们认为西班牙首都有超过 300 万名居民，而且一个人头上最多有 20 万根头发，那么就已经得出结果了。想象一下，给每位居民发一张写着头发数量的卡片，由于居民比卡片种类多，因此必然会有人会拿到重复的卡片，重复的卡片至少有一张。

还有一件可以在茶歇时聊起的小事：我们可以确定，如果 10 个人开会，至少有 2 个人会与相同数量的与会者打招呼。为什么呢？因为我们知道，在开会时，肯定不可能一个人和谁都没打招呼，而另一个人和所有人都打了招呼。因此，参与者打招呼的人数会是 {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} 中的一个（如果有一个没教养的家伙没和任何人打招呼），或是 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} 中的一个（如果这个没教养的家伙没来）。无论如何，如果我们给每个人都贴上他打招呼的人数，那么 10 个与会者就有 9 种标签，鸽子比鸽笼数多，因此必然有 2 个人打招呼的人数相同。

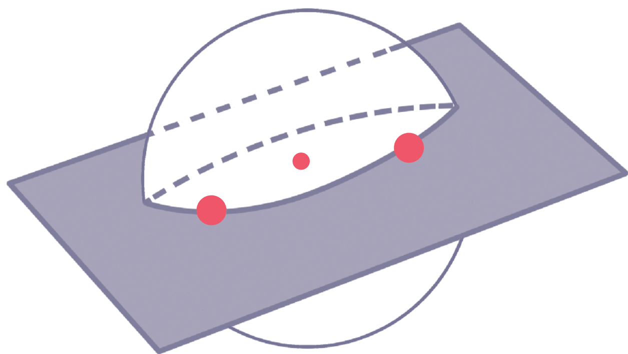
使用鸽笼原理，我们还可以确定，比如（随机）选择 1 和 11 之间 7 个不同的自然数，其中肯定有两个数的和是 12。为什么呢？我们把数 1 到 11 放在 6 个盒子里，每个盒子中的两个数加起来等于 12，如图所示：

2+10	3+9	4+8	5+7	1+11	6+6

接下来，我们必须从盒子里选出 7 个数，而我们只有 6 个盒子，因此肯定会有两个数是从一个盒子里选出来的，好啦。

以上是鸽笼原理的一些简单结果，但还有更多对于数学家和非数

学家来说都非常有趣而惊人的结论。我喜欢的一个结论是，如果你在球（球面）上用笔标出 5 个点，那么其中必然有 4 个点位于同一个半球上。是的，就是这样。当你画好前 2 个点之后，你已经定义了 2 个半球：考虑由你画的 2 个点和球心定义的平面，并沿着这个平面切开。也就是说我们已经定义了赤道。现在你还要再画 3 个点，而你只有 2 个半球……



赤道上的点被认为是同时属于两个半球的点。很漂亮，不是吗？同样根据鸽笼原理，我们可以得出，如果一群人的人数超过了 366，那就必然有两个人在同一天过生日。但对于这个生日问题，更加惊人的事实是，当只要有 57 个人时，至少有两人生日在同一天的概率就达到了 99%。这个事实可以参考我们前面解释过的生日悖论。

现在我向你提出一个在茶歇时的挑战，就不用去说那些有的没的了：如果 9 个人随机坐在一排 12 把椅子上，必然会有连续 3 张椅子被占。你可以尝试所有的可能性，但这要花点时间……想想鸽子和鸽笼吧。

20　尺度问题：真相还是谎言？

由于缺乏衡量定量事实的精确工具，我们收到的信息往往并不完全客观。然而更有趣的是，有时候，哪怕使用精确的工具，我们也是错误信息的受害者。

在我们生活的这个时代，我们不断看到政治家用数据来介绍国家的状况，数据可能是好的，也可能是不好的，这取决于介绍的人。

我们不知道该相信谁，事实上我什么都搞不懂。但我想说的不是这个。在这些情况下，问题似乎是我们还没有设计出好的“温度计”来客观地测量失业，也没有设计出“地震仪”来预测是否会发生社会的“地震”。在现实中，人们不仅要有具体的测量设备，还要知道如何解释结果。因为哪怕我们确实有温度计来测量环境的温度，有地震仪来预测“地球的呻吟”（嘿，我听起来像爱德华特·彭塞特[①]），我们并不总是能正确地解释它们。

① 西班牙经济学家、政治家。——译者注

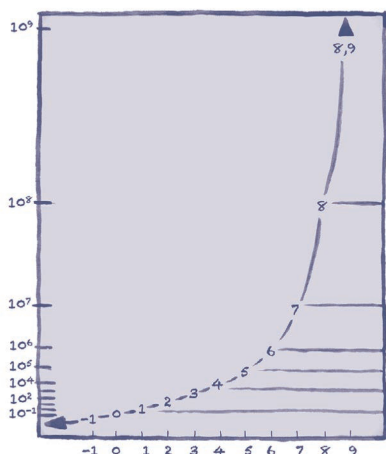


我看不到死去的人，我可没有第六感[①]，但我确实听到有人说：“姑娘，我们这儿在一周之内就从 18 度升到了 36 度，热了一倍。”我会非常礼貌地回答：“嗯，那是因为是你在说，如果换个美国人来说就不是了。”我们用摄氏度来测量温度，但在费曼的家乡，温度是以华氏度为衡量的，那就不是热了一倍了。如果你不记得在学校里学过的把摄氏度（°C）转化为华氏度（°F）的公式，你要记住，水在 0°C 结冰，在 100°C 沸腾，相差 100°C；水在 32°F 结冰，在 212°F 沸腾，相差 180°F。因此，1°F 相当于 100/180°C（即 5/9°C）。所以，如果我们使用的温度单位是摄氏度，要计算华氏度，就得将摄氏温度乘以 9，把结果除以 5，再加上 32。

① 指电影《第六感》中的情节。——译者注

因此，不是气温热了一倍，而是摄氏温度高了一倍，如果你这么说的话，是的。顺便提一下，你知道在 1742 年摄尔修斯提出这个温标的时候，100°C 是水在海平面结冰的温度，而 0°C 是水在同一海拔沸腾的温度吗？是的，正是同为瑞典人的卡尔·冯·林奈在 3 年后把它反过来了，就像我们现在用的那样。

我们接着往下说。我们在谈论地震时，也会看到一个类似于“热了一倍”的错误。不，8 级地震不是 4 级地震的两倍——我有时会“有幸”在报纸中读到这种说法。实际上，8 级地震比 4 级地震大 10 000 倍。为什么呢？因为衡量地震大小的尺度“矩震级”是一个对数尺度。



用于测量地震大小（地震释放的能量）的尺度不是线性的，而是对数的，如图所示。我们看到8级地震释放的能量几乎是7级地震的两倍。同时，8级地震导致的地球震动（按移动的幅度计算）要比7级强10倍

啊！对了，我还没有说里氏震级，有几个原因。最重要的一个原因是，里氏震级不再用于大于 6.9 级的地震，因为它不再可靠，而且给表现明显不同的地震分配近似的震级。事实上，里氏震级仅应用于美国加利福尼亚州的圣安德烈亚斯断层和特定的地震仪，顺便说一下，它只能达到 6.8 级。然而，我们会继续听到或看到有关里氏震级的信息，因为有些记者在发布新闻时坚持要加上“里氏”二字。

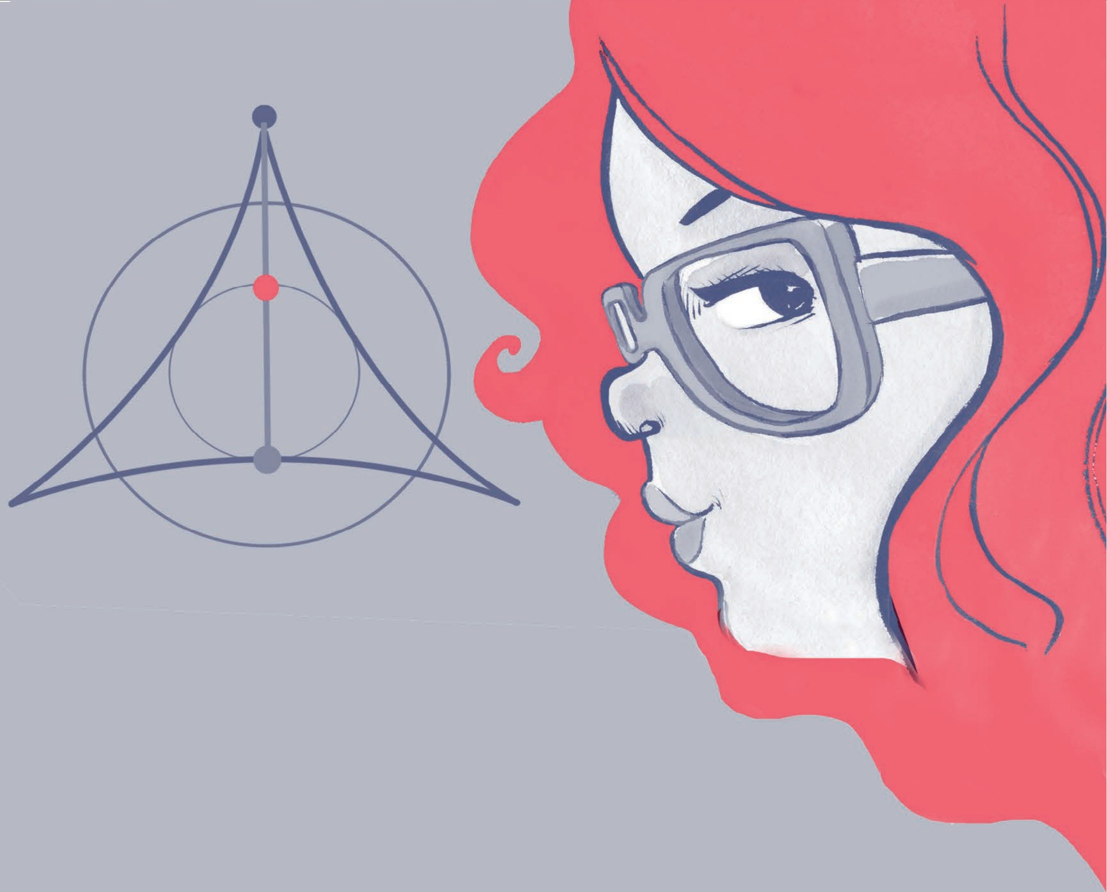
我们继续。“矩震级是以 10 为底的对数”是什么意思？这意味着震级每上升 1 级，就相当于地震释放的能量乘以 10。因此，5 级地震比 4 级强 10 倍，6 级比 4 级强 100 倍，7 级比 4 级强 1000 倍，因此 8 级比 4 级要强 10 000 倍。使用这种类型的对数尺度，是因为当要测量的数据的大小可以有天壤之别，而且要测量的数据的值范围非常大时，对数尺度更合适。

实际上，里氏震级（同样为对数尺度，在低于 6.9 级时与矩震级相似）受到了天文学中用于测量天体亮度的“视星等”的启发。

注意，我们说的是震级，也就是地震仪所测量的数据。有时候，在一些新闻中，震级会和烈度相混淆。烈度是一种主观测量，由人眼对建筑结构中可见损伤的估计而定。

还有一些或多或少标准化的方式来测量烈度，其中最著名的是麦加利（Mercalli）烈度。欧洲还有欧洲宏观地震烈度（European macroseismic scale），比如，如果在地震中，大部分睡着的人醒来和（或）门窗自己关上，就会被列为 V 级烈度（用罗马数字表示）。你看，即使用精确的工具测量，我们也不能始终相信自己的解释。

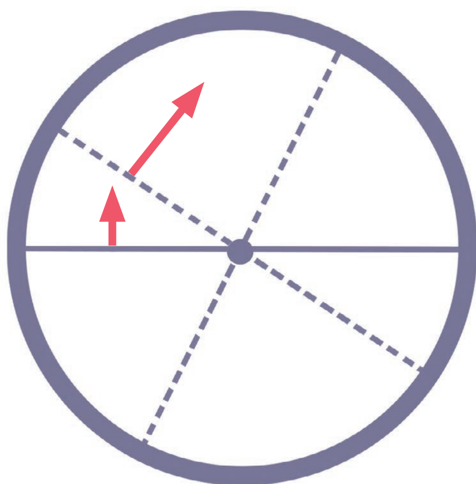
这也就解释了，如果没有演出，6000 人就足以填满一个广场，例如马德里的海王星广场；而在其他场合下，如果有必要，它可以容纳 100 万人。



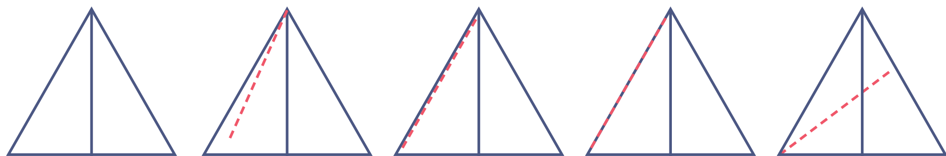
21　佩龙树停车法

你可能经历过，在一条狭窄的街道上侧方停车，最终因为没有足够的空间而放弃。在这种情况下，停车所需的最小空间是多大呢？这个貌似非常简单的问题让俄罗斯和日本的研究者吃尽了苦头。

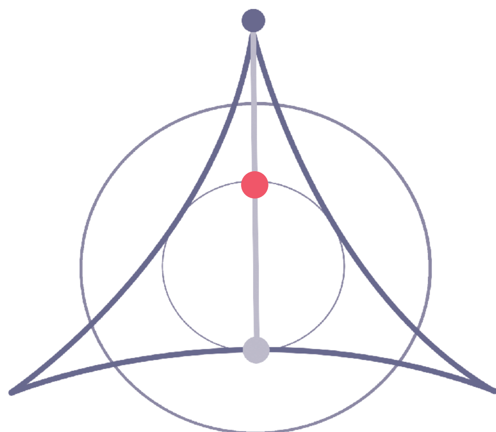
我几乎可以肯定，你听过有人用“360 度大转弯”这个说法来描述生活中的剧烈变化。你肯定悄悄地笑了，因为你知道 360 度转弯并不是一个根本性的改变，因为它转了整整一圈，又回到了开始的地方。也就是说，这个说法更像是被动消极和墨守成规的同义词，然而在其他情况下，想要完成 360 度转弯会引发大量的数学研究。比方说，假设有一根长 1 米的针（杆），要把它转一圈，所需的最小面积是多少？随便想一下你就会得出结论，它可以在直径为 1 米的圆里转一圈。



但这一步能在更小的区域内完成吗？是的，能。在高度为 1 米的等边三角形里，我们可以用类似于停车时的“动作”，尽可能地转弯，向前或向后移动，再继续转……



我们把注意力放在三角形的一条高上（图中红色的虚线），把它转动一点，让它靠到三角形的一边，放低到三角形的另一个顶点（左下角），再旋转它，直到接触三角形的另一条边。还能让区域更小吗？可以。根据日本数学家挂谷宗一提出的“挂谷转针问题”，允许一根 1 米长的针转动的最小区域（允许像停车一样的位移）是一个称为“三尖瓣线”的图形，如下图所示：

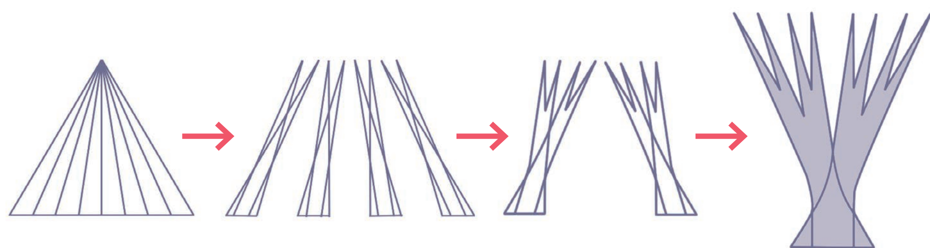


如果针长 1 米，则针的中点轨迹构成的圆周直径（图中红色）为 50 厘米，是针的长度的一半。不幸的是，我们的日本同行错了。不过这个问题被命名为“挂谷问题”，因为问题是他提出的。存在可以让针转动的比三尖瓣线还要小的区域。实际上，我们可以找到任意小的区域来让针旋转。是的，你没看错，我们可以找到 0 附近无限小的区域，让针在其中转动。

有人很有想象力地把这些区域称为“挂谷集合”。什么？不可能？然而俄罗斯数学家亚伯兰·萨摩洛维奇·贝西科维奇证明了这一点。任选一个你能想到的最小的数（当然是正数），贝西科维奇都能够构造一

个面积比你选择的数还小的区域，让 1 米长的针可以旋转 360 度。实际上，贝西科维奇描述的集合具有的特性是，我们可以在任何方向上放置 1 米长的针。但根据贝西科维奇集合，我们可以构造挂谷集合。

怎么做的？最著名的方法之一是由另一位数学家提出的，这次是位德国人——奥斯卡·佩龙，他在 1928 年的一篇论文中简化了贝西科维奇的提议。佩龙构造的东西被称为“佩龙树”，从高度为 1 米的等边三角形出发，将其分成足够数量的面积相等的三角形，方便地叠加起来，如此获得的图形内部可以在任何方向上放置 1 米长的针。我们将原始三角形划分得越多，叠加产生的图形（树）的面积就越小。



现在我们只需要旋转并组合佩龙树就可以获得贝西科维奇提到的区域。就像在狭窄的地方停车一样，需要对针进行旋转、前进和后退的操作。这类问题，和所有数学分支一样，在统计学、离散数学、组合、偏微分方程等方面有无限的应用……陶哲轩的文章[①]解释了其中一些应用。

我们后面还会继续讨论这个问题。现在，你没有理由不在狭窄的街道上停车了，你只需要耐心，当然，还有动力转向系统。

① Terence Tao, *From Rotating Needles to Stability of Waves: Emerging Connections between Combinatorics, Analysis and PDE, Notices of the American Mathematical Society*, vol.48, n°3, 2001.3.

22 看台“人浪”的科学解释

你很可能在体育场中参与过“人浪”。也许你只是被当下的兴奋所感染，或者，谁知道呢，就是无聊……你很可能没有意识到的是，研究“人浪”的起源和传播可能对于某些严肃的科学领域来说更有趣。

在体育赛事，特别是足球赛中，人们常常会参与形成所谓的“人浪”。实际上，这波浪潮被称为“墨西哥人浪”，因为它在 1986 年墨西哥世界杯期间开始流行。通常，这种现象在公众希望参与盛事并群情鼎沸时出现。一些观众从座位上站起来再坐下，然后相邻的观众也这样做。

这个现象背后隐藏着一个有趣的系统，值得用物理和数学工具研究。有几项研究涉及“人浪”的不同方面，让我们对其特征有了很好的了解。

1. 它由少数观众发起，约为几十人。差不多需要 25 名观众来发起一次“人浪”。

2.“人浪”会很快稳定下来，并达到 12 米每秒的典型速度，即每秒



经过约 20 个座位。它的宽度在稳定阶段保持不变，为 6 至 12 米，在起立阶段约为 15 个座位。

3.“人浪”通常会沿顺时针方向行进。

4.“人浪”会自发消散。

为“墨西哥人浪”创建数学模型很有意思，原因不止一个。首先，它涉及一个自组织和自发行为的系统，这些行为源于大量独立行动的个人相互协调。

这非常有趣，因为集体行为取决于每位观众的个人决定。也就是说，我们需要将决策过程与集体行为过程结合起来，这对理论描述和计算机模拟都是一个挑战。幸运的是，物理学和数学为我们提供了解决这个问题的工具：例如，研究气体或材料，就要结合对构成元素的描述与

对系统的全局描述。

你可以对一个乍看起来微不足道的问题进行猜测，但它实际上是非常复杂的：当一小群观众协调发起“人浪”时，通常会发出某种声音。当你站起来再坐下时，你会预期两边的观众继续这一运动。也就是说，“人浪”应该从焦点沿两个方向传播。

然而，经验告诉我们——如果你去看过足球赛的话就肯定体验过了，“人浪”通常只沿一个方向传播，而且一般是顺时针。这引入了一个非常有趣的破坏对称的因素，因为它在许多自然物理现象中都有体现。

利用每个个体行为的概率模型，我们可以得到对“人浪”全局行为的良好近似。通过非常简单的模型就可以模拟“墨西哥人浪”的外观、传播和消失。事实上，它在乐高足球电影中也有相当不错的应用，看台上会自发地产生“人浪”。这种看似荒谬的研究对于处理火灾蔓延或控制心脏运动的电信号的传播非常重要。在这两个例子中，无论是在火灾面前森林中每棵树的行为，还是在经历某个神经刺激时每个心脏细胞的行为，控制整个系统的行为都十分重要。如果我们的心脏细胞在面对各种刺激时没有全局协调，后果将是灾难性的。

令人惊讶的是，例如为研究气体或可兴奋细胞开发的数学工具，可以以一定程度的信心用在大型社会群体上。该领域的研究可以为封闭空间中的群体危机管理提供工具，避免不必要的灾难。

怎么样？值得来一次“人浪”吗？走吧，我要开始了。来咯！

23 晚宴、问候与图论

有时候，你被邀请参加晚宴，却不记得是否和所有人打了招呼。你的同伴可能也不记得了……这是一个通过图论找出答案的好时机。



这不是我们第一次，也不会是最后一次讨论图论，相信我。为什么呢？嗯，除去众多其他更乏味的原因，这是因为这个数学分支提供了强大的工具来优雅而简洁地解决问题，这让它值得研究，其中一些解答还挂在博物馆的墙壁上。好吧，我有点夸张了，但在中学了解一些图论知识确实会很有趣，因为它可以让学生用直观而迷人的工具来解决复杂的数学问题……而且，谁知道呢？也许它能让一大部分中学生消除对数学的不满呢。

让我们来看一个与聚会和问候有关的谜题吧。比如，安娜和布拉斯与其他 4 对夫妇一起参加聚会。当他们见面时，一些人握手问候，另一些人则贴面吻。聚会结束时，布拉斯问，所有与会者分别和多少人握了手？他得到了 9 个不同的答案。那么安娜和多少人握了手？花点时间思考一下，进行你想做的所有计算。

好了。

解决数学问题最重要的是要学会读题。我们仔细读题并尝试从中提取所有可以帮助解决问题的信息，例如，布拉斯得到了 9 个不同的答案。聚会上有 10 个人，其中一个人布拉斯问了其他人并得到 9 个不同的答案，这意味着所有答案都不同。这看起来很傻，但事实并非如此。

我们继续。在布拉斯所问的 9 个人中，每一个人握手的次数都是在 0（这就是特别喜欢贴面吻的人）和 9（因为特别害羞，不喜欢贴面吻而只握手的人）之间的某个数。

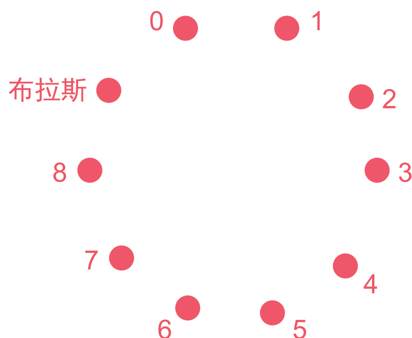
换句话说，布拉斯所问的人给出的答案包含在 {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} 中。因为有 10 个数，但只有 9 个人，所以多出来 1 个数。

让我们再思考一下：思考是免费而有益的。任何人与 9 个人握手都没有意义。为什么呢？好吧，因为这意味着他还要和自己的伴侣握手，而在通常情况下，一对夫妇在参加聚会前，已经在自己家里相互问候过

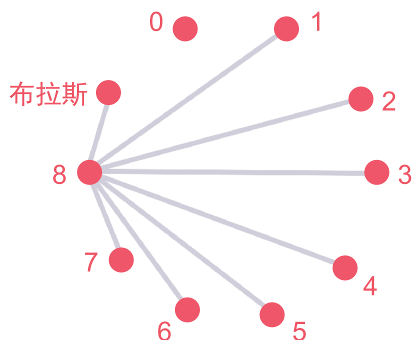
了，不是吗？太棒了，因此，我们从可能的答案中去掉了 9，那么布拉斯从聚会的参与者那里得到的答案就是：

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

往下看。我们必须找出安娜和几个人握了手。为此，我们把参加聚会的 10 个人表示在图中。我们画上 10 个顶点，并将其中一个顶点标记为布拉斯，其他 9 个人用对布拉斯的回答对应的数字标记。



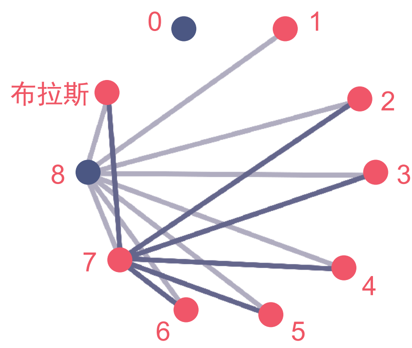
现在将顶点（对应于参与者）与握过手的人用边（直线）连接起来。我们从 8 开始。顶点 8 必须与剩下 9 个顶点中的 8 个连接。嗯，这很简单，我们把它和除了顶点 0（提醒一下，0 代表这个人只贴面吻）之外的每个顶点连起来。



我们可以从上页图中推断出什么？实际上，顶点 0 和顶点 8 是伴侣，因为后者和其他人握了手，而且聚会时与伴侣握手是不常见的（或者说是不合理的）。

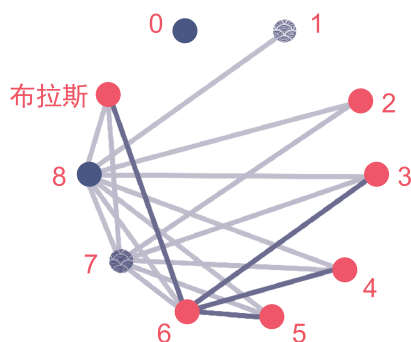
太好了。我们把顶点 0 和顶点 8 涂上相同的颜色来表示他们是一对（比如一对德国老夫妇），然后继续画图中其他的边（直线）。

轮到顶点 7 了，从这个顶点出发必须有 7 条边。我们已经有了一条，它与 8 连接，所以我们必须再加上 6 条边。我们不会将它连到 0，因为 0 不与任何顶点连接；也不会连到 1，因为它已经有了一条边（连到 8）并且只能有一条边。所以顶点 7 还要连到 2、3、4、5、6 和布拉斯。来吧。



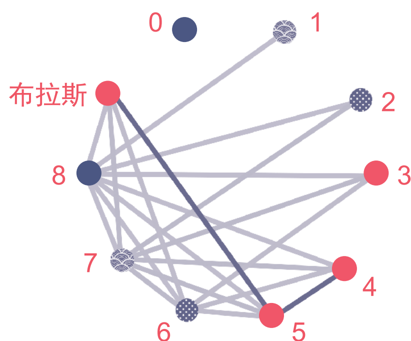
这样我们就得到了 7 的伴侣，它就是 1。为什么呢？因为 7 与 0 和 1 之外的所有人都握手，但 0 和 8 是一对，所以没有其他选择。我们把它们涂上相同的颜色，表明它们是一对，继续画图中的其他边。

轮到顶点 6 了。6 已经有了 2 条边（连到 7 和 8），所以我们还要找出 4 条边。我们不能把它连到 0，不能连到 1，也不能连到 2，因为它们都已连接完成了：只剩下 3、4、5 和布拉斯。画上去吧。

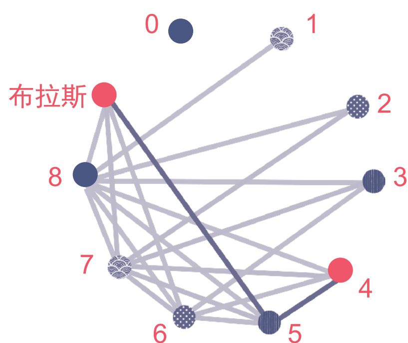


好了，我们画出来了，对吧？6 的伴侣是 2，因为在 3 个没有握手的顶点（0、1、2）中，2 是唯一尚未配对的。我们用相同的颜色为这一对夫妇着色，接下来看 5。

从顶点 5 出发已经有了 3 条边，所以我们还需要 2 条边，唯一可能的选项是 4 和布拉斯。其余的顶点已经完成，也就是说，它们连接的边数已经和标记的数字一样了。



根据类似于前面的推理，我们得出结论，5 和 3 是一对。我们再把它们涂成相同的颜色。我们不需要画更多的边了，因为所有顶点都完成连接了。



好了，就是这样。布拉斯的妻子安娜是顶点 4，因此，她和 4 个朋友握手致意，和另外 4 个朋友贴面吻。

很有意思，不是吗？我们下次再来看另一张图和另一个聚会吧。

24　JPEG 和你的自拍

你是那种喜欢自拍，让朋友们羡慕你的假期的人吗？要知道，因为有了数学，这件事才变得如此时髦，并对我们的日常造成了这么多破坏。对不起，凡事都没有十全十美。

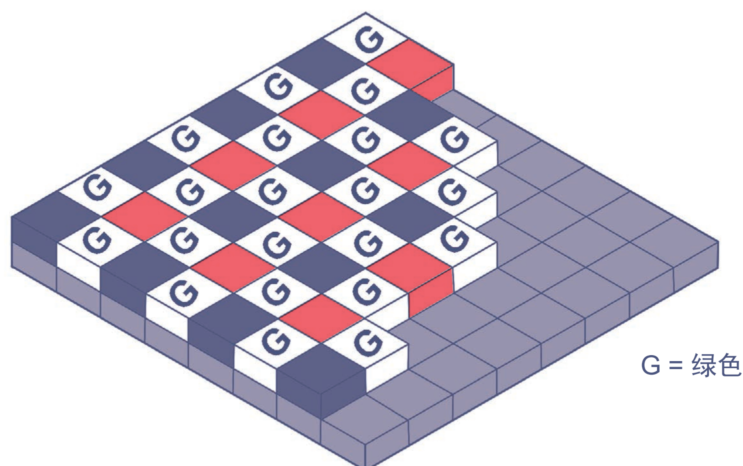


夏天可能是我们一年中拍照最多的时候。我们利用假期来“惩罚”我们的熟人，向他们发送我们所在而他们却无法前来的美好地点的图片（或者是沙滩上的脚丫子，为什么不呢）。为此，绝大多数人都使用手机或数码相机。不过还有其他方法，不使用这些设备就可以发送图像，不过更原始一点——明信片，还记得吗？

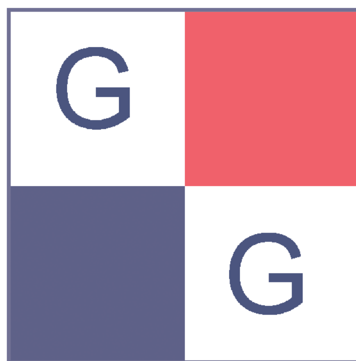
你想一下，我们拍摄的绝大多数图像都存储在扩展名为“.jpg”的文件中，但什么是 JPG 文件？这就是我们今天要谈的内容，还有数学在其中起到的关键作用。

JPG 这个名字来自 JPEG，它是联合图像专家组（Joint Photographic Experts Group）的首字母缩写，它在 20 世纪 90 年代设定了一系列压缩图像的标准（或步骤），即尝试使用相对较小的空间来存储尽可能多的信息。这使我们能够在互联网上发送并存储图像（占用空间更小），无须将所有积蓄都花在硬盘上。我们前面已经警告过，要得到一个 JPG 文件要用到很多数学工具。我们会试着谈论这些工具：矩阵、余弦、分割和舍入，但它们难不倒任何人。

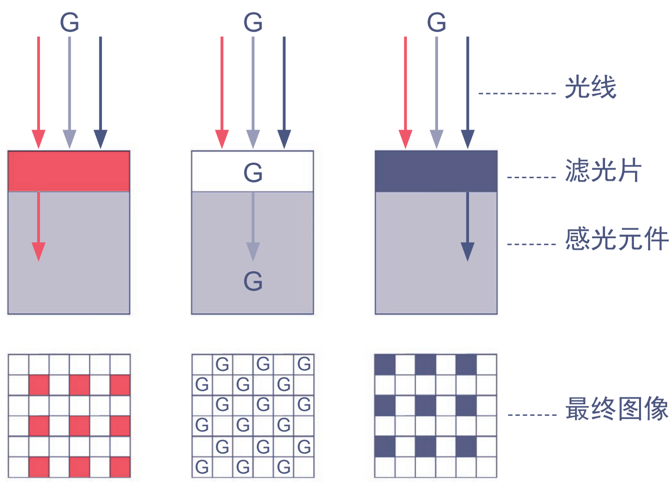
我们必须要了解的第一件事，是照相机如何捕捉图像。最核心的部分是传感器：它有不同的类型，但它基本上是一个小型传感器（称为感光元件）网格，可以捕捉落在它们上面的光线强度。注意，照相机的传感器不捕捉颜色，只记录光强。我们的做法是在一些感光元件上放置绿色滤光片，在一些感光元件上放置红色滤光片，在另一些感光元件上放置蓝色滤光片。因此，每个感光元件仅会接收三基色（红、蓝、绿）之一的光（红色滤光片仅接收红色的光，以此类推）。感光元件会按照每台照相机的具体方案分组。大多数照相机使用拜耳阵列布局，这非常简单：



我们可以看到，绿色感光元件的数量是其他颜色感光元件的 2 倍。这是因为人眼对绿色的敏感度差不多是蓝色或红色的 2 倍。（这显然是个进化问题：因为长期以来，辨别不同的植物对人类十分重要，所以绿色很重要。）因此，我们的自拍中的每个像素都由阵列中的 4 个感光元件定义。



每个感光元件都会给出一个它的颜色的光强值，用一个 0（感光元件捕捉不到这种颜色）和 255（它捕捉到该颜色的最大光强）之间的数字表示。因此，我们可以将图像视为 3 张表（每种颜色一张），我们通常称之为“矩阵”，其中每个条目都是 0 和 255 之间的数字。



如果我们把这三个矩阵存储起来，就得到了照相机捕获的图像，但这样的话，每张图片的文件都巨大无比，不会节省任何空间。绝大多数专业人士和高级业余爱好者使用的 RAW 文件则确实（或多或少地）保存了这三个矩阵的所有数值。

我谈到了很多关于矩阵的事，你发现了吗？如果有人不记得或不知道的话，我来告诉大家：矩阵无非就是一张有数字的表。从照片中得到的一小块矩阵是这样的：

5	176	193	168	168	170	167	165
6	176	158	172	162	177	168	151
5	167	172	232	158	61	145	214

33	179	169	174	5	5	135	178
8	104	180	178	172	197	188	169
63	5	102	101	160	142	133	139
51	47	63	5	180	191	165	5
49	53	43	5	184	170	168	74

是的，这是真的，它比别人通过 WhatsApp 发送给我们的许多照片更漂亮。我偏题了，我们继续讲。

JPG 的关键是存储该矩阵（几乎）所有的信息，但占用更小的空间。为此，要点在于，如果一个矩阵里有许多 0，则存储它的成本更低。如果那些 0 相互都很靠近，那就更好了。为什么呢？好吧，因为如果需要写 16 个连续的 0，我们可以把它简写为 16(0)：信息是一样的，但这样就只需要 5 个字符，而不是 16 个字符——如果你用微博的话就会知道好处在哪里。

那么，如何在矩阵中得到很多 0，这些 0 非常靠近，照片的质量不会损失，而且它是一个（几乎）可逆的过程？啊，这就需要很多数学工具了。

第一步是从 3 个初始矩阵（红色、绿色和蓝色）出发，求出另外 3 个描述亮度、蓝色与红色的比例 Cb 以及绿色与红色的比例的矩阵 Cr。这只需要简单的方程就可以得出。例如，把 3 种颜色转化为亮度，由下式给出：

$$Y = 0.257 \times R + 0.504 \times G + 0.098 \times B + 16$$

（其中 R、G、B 分别是红色、绿色和蓝色矩阵中给定像素的值。）

另外两个方程是：

$$Cb = U = -0.148 \times R - 0.291 \times G + 0.439 \times B + 128$$
$$Cr = V = 0.439 \times R - 0.368 \times G - 0.071 \times B + 128$$

对于熟悉矩阵运算的人来说，这些方程都可以通过矩阵乘法和加法完成，而且我们可以证明它是一个可逆运算（并且很简单）。

有了这三个新矩阵，我们将通过固定步骤，把它们转换成具有许多相互靠近的 0 的矩阵。

首先，我们将每个矩阵划分为 8×8 的子矩阵（JPG 的 8 位），就像我们在本文开头所介绍的那样。然后，我们将每个数字减去 127（这个值会根据不同的亮度或颜色矩阵而变化），以便让这些值以 0 为中心。这样，我们例子中的矩阵会变成这样：

– 122	49	66	41	41	43	40	38
– 121	49	31	45	35	50	41	24
– 122	40	45	105	31	– 66	18	87
– 94	52	42	47	– 122	– 122	8	51
– 119	– 23	53	51	45	70	61	42
– 64	– 122	– 25	– 26	33	15	6	12
– 76	– 80	– 64	– 122	53	64	38	– 122
– 78	– 74	– 84	– 122	57	43	41	– 53

下一步可能看起来更复杂，但它无非是对每个 8×8 子矩阵中的数字应用一个公式。这个公式称为“离散余弦变换”，与傅里叶变换非常相似，后者应用于图像或声音处理等许多领域。

将离散余弦变换应用于矩阵的结果是：

– 27.500	– 213.468	– 149.608	– 95.281	– 103.750	– 46.946	– 58.717	27.226
168.229	51.611	– 21.544	– 230.520	– 8.238	– 24.495	– 52.657	– 96.621
– 27.198	– 31.236	– 32.278	173.389	– 51.141	– 56.942	4.002	49.143
30.184	– 43.070	– 50.473	67.134	– 14.115	11.139	71.010	18.039
19.500	8.460	33.589	– 53.113	– 36.750	2.918	– 5.795	– 18.387
– 70.793	66.878	47.441	– 32.614	– 8.195	18.132	– 22.994	6.631
12.078	– 19.127	6.252	– 55.157	– 85.586	– 0.603	8.028	11.212
71.152	– 38.373	– 75.924	29.294	16.451	– 23.436	– 4.213	15.624

这些值具有一个特性，就是最重要的值出现在矩阵的左上部分。

现在我们只剩下一步（加上编码）。有一点很重要，就是目前为止我们所做的一切都是可逆的，因此既没有压缩也没有造成质量损失。然而，下一步确实会产生质量损失：我们将得到的矩阵的每个元素除以一个数字（如果我们要求更高的压缩水平，这个数字会更大；如果我们需要更高的质量，这个数字会更小）。例如，用于 50% 压缩的值如下：

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

因此，我们把 − 27.500 除以 16，四舍五入为最接近的整数（− 2），把 − 213.468 除以 11 得到 − 19，以此类推，直到得到以下的值：

− 2	− 19	− 15	− 6	− 4	− 1	− 1	0
14	4	− 2	− 13	0	0	− 1	− 2
− 2	− 2	− 2	7	− 1	− 1	0	1
2	− 3	− 2	2	0	0	1	0
1	0	1	− 1	− 1	0	0	0
− 3	2	1	− 1	0	0	0	0
0	0	0	− 1	1	0	0	0
1	0	− 1	0	0	0	0	0

由于我们除以相对较大的数字，许多值都是 0（特别是矩阵的右下角），这正是我们想要的。这是我们存储的矩阵（以折线顺序分布）。当然，从最后一个矩阵出发，我们可以恢复所有前面的步骤，但是，由于我们在做除法时进行了舍入，我们不会获得精确的原始图像，而会获得

看起来很接近的图像。

太棒了吧？你可以流下感动的泪水。当有人给我讲到这个的时候我就哭了。还有其他压缩图像的方法，这个方法尽管不是最高效的，却是最常用的。例如，联合图像专家组已经发布了一种名为 JPEG 2000 的新方法，使用了比离散余弦变换更复杂的工具。不过这个还是改天再讲吧。

好啦，你可以继续拍度假照片啦。

25　用彩色铅笔解数独

利用给顶点着色的图，我们提出了一个解数独和制作新数独的策略。你想试试吗？

	1	3	
2			
			3
	2	1	



图论几乎可以应用于任何领域，我们已多次说过了：从揭露社交网络主页上的奇怪现象，到开发品尝食品的方法，从安排婚礼宴会而不会引发冲突，到让《权力的游戏》中的卡丽熙走下王座……我再说一次，它（几乎）可以应用于一切。然而，图论最引人注目的应用之一与图和一盒彩色铅笔有关。

夏天，有些人在度假时，往往会遇到这种情况：除非打算在 15 天内玩遍 4 个国家，把自己搞得精疲力竭（20 世纪 60 年代末有一部电影《如果星期二，一定是在比利时》讲的就是这种情况），否则我们不知道该如何填满自己的时间。有那么几个小时（或在全家出行时）我们会诉诸手头能找到的第一个消遣。其中一个就是数独（如果你没玩过这个游戏的话，我鼓励你试一下，老实说，它还挺有意思）。今天，我们将学习使用图和彩色铅笔来解决（和设计）数独。也许有人想知道，是否有自动化方法来解数独，是否有计算机程序可以在转眼之间解决它们。事实是，是的，有几种可以解数独的程序，但我们今天要提出的方法不仅可以解数独，还可以设计数独。

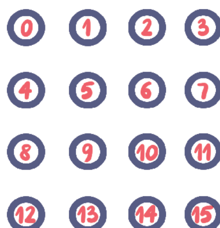
我们的想法是将数独视为一个图（就像我们在谈论友谊悖论、多数错觉或《权力的游戏》时用到的那种图）。图包含一组点，我们称之为顶点；还有两两连接其中一些点的线，我们称之为边。你可以想想 Facebook 的例子：每个用户都是一个顶点，社交网络中互为好友的两个用户将被一条边连起来。现在让我们看看如何通过数独构建图，以及如何给顶点着色来解数独。

为了展示这一过程，我会用一个 4×4 的儿童版数独。我所说的一切对于普通的 9×9 数独都是有效的，但是解释起来比较麻烦，我们可能会迷失在错综复杂的顶点和边中。假设我们有一个非常简单的数独，如下页图。

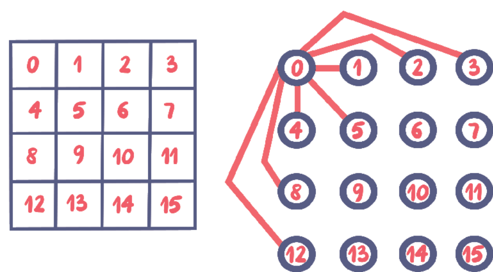
	1	3	
2			
			3
	2	1	

我们想把它和一个图关联起来。这个想法很简单：首先构建一个所谓的“基础数独”，也就是一个空的数独，我们稍后再添加限制。那么我们的图将有 16 个顶点，编号从 0 到 15（图中每个方块对应一个编号）。

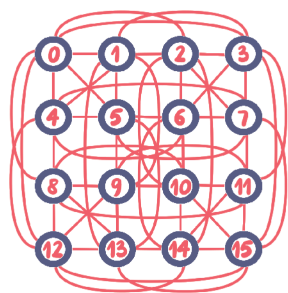
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15



现在我们用边把格子 0 对应的顶点与所有和它数字不相同的格子对应的顶点连接起来：与它同一行（最上面一行）的顶点、与它同一列（最左一列）的顶点和与它在同一个田字格（左上角）的顶点。

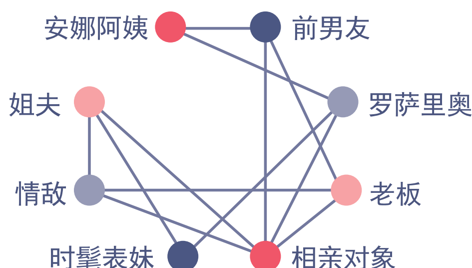


对所有顶点重复这个过程就可以得到下图，这就是我们所说的基础数独图。



虽然它看起来很复杂，但这个图对于计算机来说非常简单。9×9 数独的解法也是一样的。

现在要用上彩色铅笔了。我们的方法是给图中的顶点着色——如果两个顶点共享一条边，则它们的颜色不能相同。例如，在为婚礼宴会安排桌子时，我们可以为顶点着色来表示不相容关系，如下页图所示。



这个思路是用 4 种颜色为基础数独图着色，给每种颜色安排一个数字，从而得到一个数独。有趣的是，对于每种不同的着色方法，我们都可以得到一个不同的数独，我可以向你保证，得到的数独有很多。

要解决示例中的数独，则需要向基础图里添加新的边。我们注意到，如果想让两个格子里的数字不同，那么它们对应顶点的颜色必须不同。这很简单：只需用边连接这两个顶点，就可以确保它们永远不会被分配相同的颜色。

	1	3	
2			
			3
	2	1	

求解数独

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

基础图顶点

在我们的例子中，基础图的顶点 1 应当连接到顶点 11，以便它们被分配不同的颜色。在基础图中，1 已经和 2、4、13 连起来了。同样，我们应该将基础图中的顶点 2 与 4 和 13 连接，以确保它们的颜色不同（从 2 连到 1 和 14 的边已经在基础数独图中了），以此类推。

接下来的一步，也是最后一步，就是数字相同的格子对应的顶点应该涂有相同的颜色。为此，看一下我们的例子：我们希望基础图的顶点 1 和 14 具有相同的数字（1）或相同的颜色（深蓝色）。怎么做呢？思考一下。

方法如下。

实际上，如果把顶点 1 与和顶点 14 同在一行的 3 个格子都用边连起来，那我们就得到结果了：这 3 个顶点都不能和顶点 1 颜色相同（深蓝色），顶点 14 就只有一个选择——深蓝色，和顶点 1 一样。

也就是说，我们要添加将顶点 1 与顶点 12 和 15 连接起来的边，因为从 1 连到 13 的边已经在基础图中了。如果顶点 12、13 和 15 都和 1 连接，那么它们都不可能是深蓝色，深蓝色就只能分配给 14。是的，它非常漂亮，我知道。

	1	3	
2			
			3
	2	1	

求解数独

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

基础图顶点

我们现在必须让顶点 4 和 13 颜色一样，再重复一次上述方法就可以了。最后，顶点 2 和 11 也应颜色相同。

将这 6 条新边添加到基础图中时，只需要遵循下面的规则为图中的顶点着色：不要使用 4 种以上的颜色，而且相同颜色的顶点之间不能有边连接。

是的，我知道，你可能觉得这个数独例子有更直接的解决方法，也许是这样。但是，这种方法很容易利用计算机实现，因此它能够在几秒钟内设计和解决更大的数独。而且，在酒吧里炫耀的时候，这种方法也显得更有创意，不是吗？

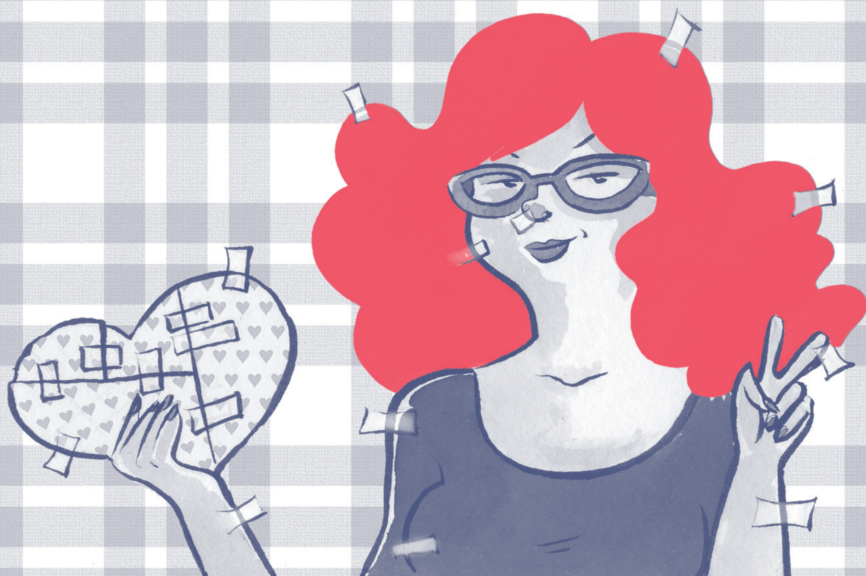
26　用更少的纸包装礼物

当情人节临近时，有些人准备向爱人赠送礼物。礼物必须好好包起来，因为没包装的礼物就不是礼物。但你知道这个包装任务中也有惊人的数学挑战吗？

临近情人节的时候，你常常会在许多媒体上看到一些文章，试图把任何事物都和爱情联系起来（有句话说爱情拯救世界，此言不虚啊）。而我也不想落伍。是的，我就是这样。

虽然有人说他们已经找到了一个预测爱情持续时间的公式，但是坦白说，从数学的角度来看，我说不好这是否严谨。所以我不打算使用数或方程来量化我们喜欢别人的或别人喜欢我们的感情，而是提出一个几何挑战——我说的不是爱情，而是礼物的大小。尽管下页图中的礼物是心形的，但我们还是看一个更简单的例子吧：把方盒子礼物用纸包起来。也就是说，我们要包装的礼物是一个立方体：一个正六面体，6 个面都是正方形的多面体。

假设我们的礼物是一个边长为 1 米的立方体（是的，它是一份

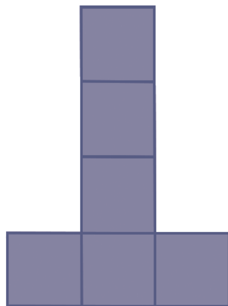


“大”礼，绝对不是戒指），要用一张矩形包装纸来包裹它。注意，我们什么时候都不能剪纸。我们没有剪刀，也不能用手撕。问题是：能包裹这个立方体的矩形纸的最小面积是多少？请记住，绝对不能剪纸。



先来想一想。如果立方体的边长为 1 米，那么必须盖住的 6 个面的总面积是 6 平方米。所以，我们需要一个面积为至少 6 平方米的矩形才能包住它。但是，如果不剪开 6 平方米的矩形就不能包住礼物，永远不行。因为，这要求这个立方体的展开图刚好是一个面积为 6 平方米的矩形，而这是不可能的。这就意味着我们需要一张面积超过 6 平方米的矩形纸。

另一方面，边长为 1 米的立方体的展开图需要一个面积为 12 平方米的矩形。好吧，如果立方体的展开图能够放入矩形里，那么只需要把这张矩形的纸与立方体一起重新装起来就可以了。

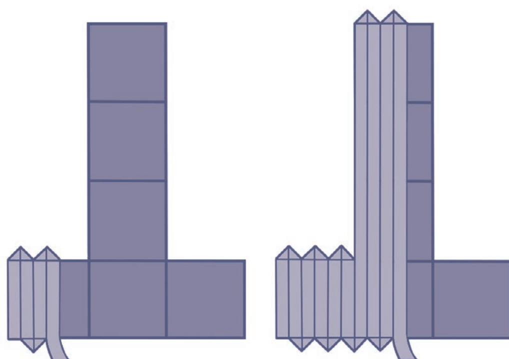


好，我们已经知道这个矩形的最小面积在 6 到 12 平方米之间。有点意思了，对吧？

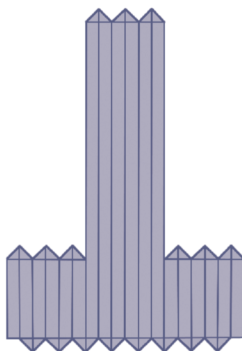
能够包裹这个立方体礼物的最小面积是多少？答案不存在，不要这样看着我，千真万确，最小的面积不存在，这是事实。如果你给我任何一张面积在 6 到 12 平方米之间，并且能够包裹立方体的矩形纸，我都能找到一个能够包裹礼物且面积更小的矩形。怎么做呢？我来告诉你。

我们来看看上一张立方体的展开图。我们已经说过，很明显，如果我们能够用矩形完全覆盖这个展开图，只要在重新组装立方体时带上它，就可以把礼物包起来。

我们要用的是一个非常长且非常细的矩形，像蛇一样，我们将用下页图中的方法覆盖立方体的展开图。



用“蛇”覆盖立方体展开图的第一步。



这个矩形“蛇”的面积是多少？这取决于“蛇”的宽度（有人在我们的数学课堂后排喊道），是的。如果我们将宽度记为 W，那么不难验证，覆盖这个立方体所用的面积是 $6 + 6W$ 平方米。

第一项 6 是被覆盖的立方体 6 个面的面积。第二项 $6W$ 是从哪里来的呢？这是超出立方体展开图部分的面积，即让这条“蛇”转弯并继续包裹礼物的地方。如上图所示，它超出了上下 6 条长度为 1 米的边，由于我们看到的这些三角形是双层的，因此“蛇”叠在自己身上。在每

一条边上，超出的部分面积都是 1（立方体边长）× W（蛇形的宽度）。这意味着蛇形越窄，我们包裹立方体所需的矩形面积就越小。虽然我们无法选择宽度为 0 的蛇形，但是无论选择包装礼品的矩形纸面积有多小，我们总能找到更小的纸；因为无论我们选择多小的正数，总是可以找到更小的正数。太有意思了，不是吗？

让我告诉你，这个问题是我的朋友、日本东京理科大学的秋山仁告诉我的。他是世界上最著名的数学科普者之一，总是教我一些非常迷人的东西。

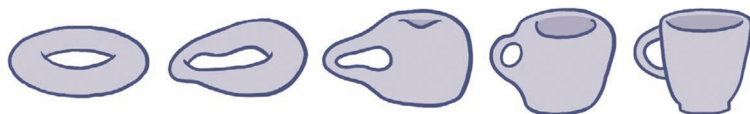
27 甜甜圈与缝纫机

我知道很少有人自己做衣服了，这可能会让我们认为缝纫机时日无多，但这离现实差得不能再远了。虽然我们可以拥有数字图书、虚拟货币、胶囊食品，但衣服总是要做的。



虽然两者在表面上没什么联系，但缝纫机其实涉及很多数学知识，主要是拓扑学（别走别走，我会解释的）。简而言之——我的拓扑朋友们不要生气——拓扑学是数学的一个分支，它研究的是对象的内在属性。也就是说，在拓扑学中，圆和方是一回事——它们都是由曲线包围的平面。实际上，半径为 1 厘米的圆在拓扑结构上与半径为 1 千米的圆一样：它们无非是由曲线包围的平面。

我们可以说，对于拓扑学家而言，几何物体就像橡皮泥一样，如果你既不撕裂也不黏合就可以将一个物体变形成另一个物体，那它们就是同一个物体。你肯定听说过拓扑学家分不清甜甜圈和咖啡杯的笑话，对吧？笑点在于无须撕裂和黏合，甜甜圈就可以变形成杯子。

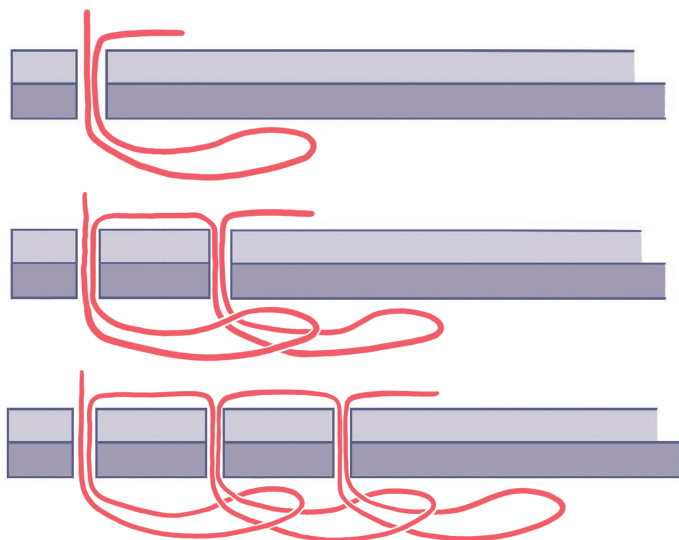


说到底，拓扑是我最喜欢的数学分支，因为它与形状和大小无关，重要的是内在，就像《美女与野兽》的故事一样。拓扑学还研究了如何打一个结或多个结，即所谓的纽结理论（如果只有一根绳）或编织理论（如果有多根绳）。

许多拓扑游戏都基于这些理论。例如，众所周知，如果不断开其中一个环，两个相套的环就无法分开。某些魔术把戏或谜题就是基于这一点形成的，比如选出两个人，在他们的手腕上都拴上绳子，并让两根绳子交缠在一起，而他们则要试着把绳子分开。

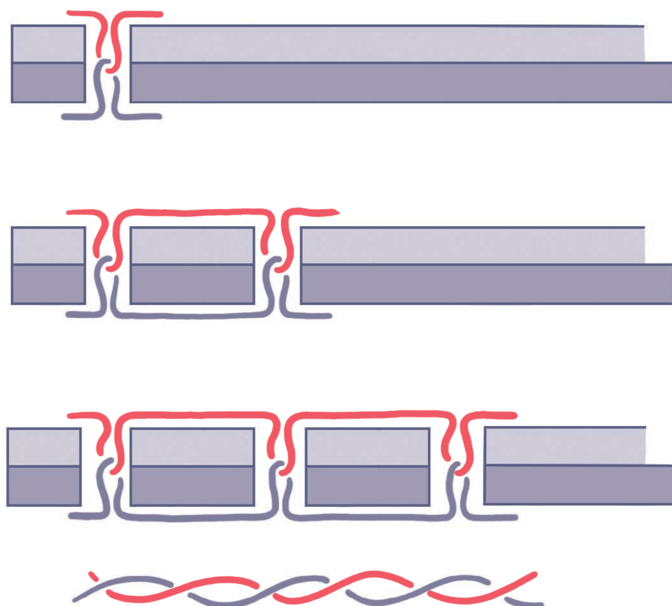
拓扑还研究如何把一种形状变为另一种形状，比如一两个人在操场上玩的翻花绳游戏。

但是这一切与缝纫机有什么关系呢？关系可不少，因为机器要试着把线编织起来，还要防止它们日后松脱。从某种意义上说，缝纫机的发展历史反映了试图解决一件在拓扑上不可能的事：把一根或多根松散的线编织起来，还要让针脚不会松脱。最初的缝纫机使用一根线编织，如图所示：



当然，这个针脚不会产生任何拓扑问题，因为它并没有打结。也就是说，你只要拉动图中线的右端，针脚就会松开。从拓扑的角度来看，这是一种解脱；但从缝纫的角度来看，这却是一个问题，因为以这种方式生产的衣服会被拆开，我们对它毫无信心。但实际上，这种机器的设计非常简单，而且非常可靠，人们仍然把它应用于某些工业，例如生产烧烤用的木炭袋。

缝纫机的技术飞跃发生在不到 200 年前（1830~1850 年），当时人们发明了使用两根线的缝纫机，把两根线编织在一起，如下页图所示。



虽然乍看起来，要获得上图中的结果是不可能的，但诀窍是线轴（引导下面的底线）没有固定到机器的其余部分上。在进行此类缝纫的第一台机器中使用了“阿基米德螺线”，这是一种将圆周运动转换为线性运动的机构。

然而，人们后来使用了另一种不需要这种转换的拓扑技巧，而且它更可靠：它用到了一个齿轮。

无论如何，不要相信这个领域的一切都已经发明好了。因为即使在今天，我们仍在研究如何防止针脚松脱，还有新的专利设计来让针脚更牢固。

后记

本文的灵感来自 Tony Phillips, *Math and the Sewing Machine*。

28 “可爱”的病毒

数学存在于我们生活的方方面面，这很显而易见。但不那么显而易见的是，它对病毒及其 DNA（或 RNA）的几何形状也有很大影响。



我们曾多次谈到数学如何帮助人们研究疾病。今天，我们要来谈谈病毒的形状。

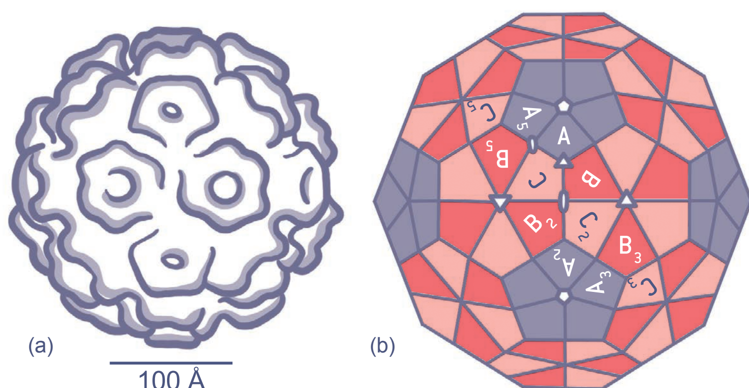
科学家们知道，自然界产生的物体通常具有非常特殊的几何形状，我们可以从中得出惊人的结论。比如，我们可以将不同鸟类的栖息地类型与鸟蛋的形状联系起来。比起其他自然物体，鸟蛋的几何形状相对简单。但有一种形式也很简单，却吸引了大批研究人员——病毒，它们具有非常特别的对称性。

事实上，根据一篇文章（其中一位作者是西班牙巴塞罗那大学的大卫·雷格拉教授）中发表的结果，许多病毒都是二十面体形式。如果想了解病毒的行为（为了和它斗争），了解其属性和结构至关重要。为此，我们研究了衣壳[①]的各种要素的组合方式：有多少个结，是什么类型，以及这些信息以什么方式帮助有效地抗病毒。

生物学家知道，许多病毒在显微镜下呈现出非常接近球体的形状。但神秘之处在于，几乎所有衣壳（覆盖由 DNA 或 RNA 构成的基因组的蛋白质结构）都具有一种非常特殊的形状：它们不是完美的球体，而更接近二十面体（由 20 个三角形面构成的多面体）。为什么是二十面体呢？

在继续之前，我们必须说明，二十面体确实是球体的一个很好的近似，但还有更好的。二十面体由 20 个三角形组成（可以用其他具有相同对称性的图形构成近似多面体）。三角形越多，多面体就越接近球体。

① 病毒的蛋白质外壳，用于包裹病毒的遗传物质。



病毒衣壳（a）在电子显微镜中观察到的几何表示（b）

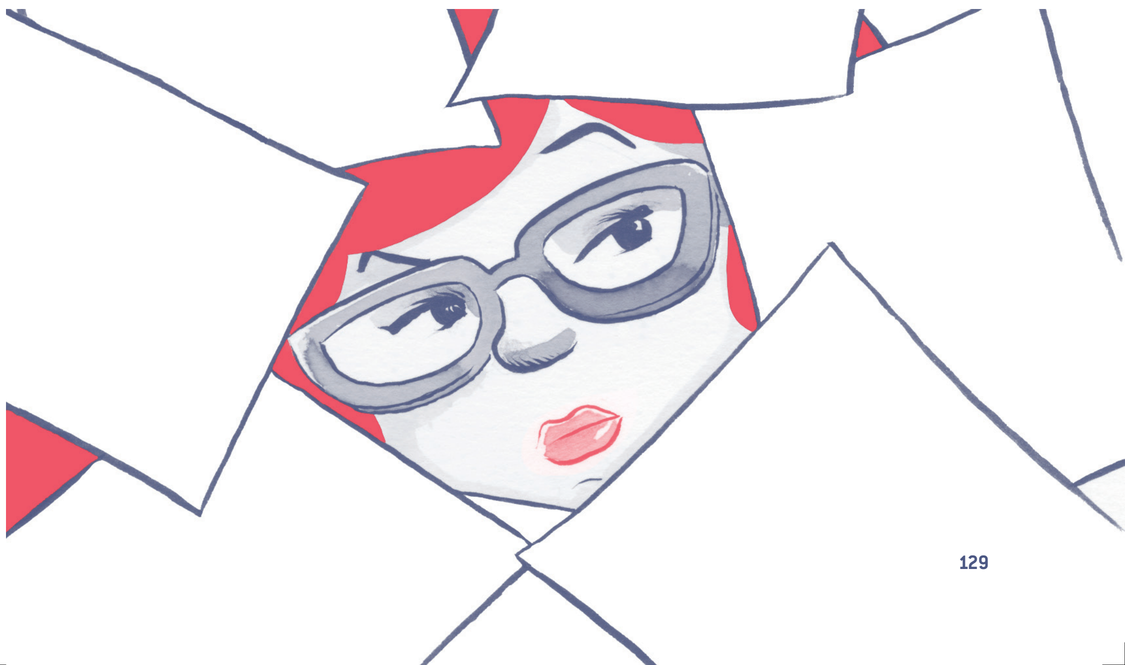
为了回答“为什么是二十面体”这个问题，科学家们提出了不同的模型，以预测病毒衣壳应呈现何种形状。这些模型的基本思想是试图找到每种蛋白质（形成衣壳结构的蛋白质）对应的方程式以及它们之间的联系。

讲一个更日常的例子吧：假设我们有一系列由弹簧连接的刚性物体，其中一些被固定住了，就像洗衣机的滚筒一样。（滚筒由弹簧支撑，允许在洗涤或脱水时有一定的运动，因为如果它被刚性地连接在洗衣机的机身上，那么滚筒的离心运动会对我们心爱的家用电器造成严重损坏。）每个弹簧的物理特性决定了方程，而且考虑到洗衣机允许的最大负荷（衣服和水），其平衡是由合适的张力取得的。对于病毒而言，覆盖它们的蛋白质就是弹簧，而且每一个蛋白质都具有其自身的特征。研究人员会用方程来表示这些特征。一旦得到方程式，他们就可以用计算机来模拟近似系统的行为，因为一般来说，它们无法得到精确形式的解。

好吧，似乎我们已经得出结论，如果病毒衣壳中只有一种蛋白质，那么它不会形成二十面体的形式；但如果有不止一种蛋白质（对于大多数病毒都是如此），这种几何结构可以在球体的理想形状和构成病毒衣壳的蛋白质的折叠能力之间达到平衡，从而实现最佳结构。太厉害了，不是吗？每当我遇到这种类型的研究，我就想，我们的宇宙本身就如此迷人，我们为什么还要相信想象出来的东西呢？

29　比妈妈更会整理

我不知道你怎么样，但我在暑假来临时花了两三天来整理东西：衣服、书籍、玩具、鞋子、电线、充电器……当然，最后的结果总是差不多的。整理东西就和每天去健身房或戒掉巧克力一样困难，甚至更困难。有没有什么方法，可以让我们不用向妈妈求助？



许多人都有这样的刻板印象：数学家肯定是个井井有条的人。不，相信我，从来都不是这样的。不过，在许多实际问题的推动下，数学确实在研究与整理物品相关的问题。特别是随着计算机科学的出现，为了节省时间和磁盘空间，人们有了智能和高效存储和整理数据的需求，随之产生的这些应用彻底改变了我们的生活。

从这个意义上说，一个非常复杂的问题（“NP 困难”问题）就是所谓的“装箱问题”。“装箱问题”的目的是使用尽可能少的箱子，来存储一系列形状、大小不同的物体。如果你搬过家的话，你就知道我在说什么了。你肯定会同意我的看法：这个问题一看上去就很复杂。不过还有另一个与整理相关的问题，它似乎更容易解决，但如果解决方法不够巧妙，我们要花的时间就可能长得多，比如整理试卷。是的，想象一下你必须按字母顺序为 4000 张试卷（比如高考试卷）排序，你会怎么做？

当你提出这个问题时，很多人会奇怪地看着你，就好像在说：“可怜人……”因为他们觉得这没有什么神秘之处：你每次只需要拿出一张考卷，然后按照字母顺序看看已排好的一叠试卷，找到合适的位置把它放进去就行了。

是的，你确实可以这么做。谈到排序算法时，我们把这种方法称为插入排序法。为了简化例子，我们用数来标记试卷，这是一个从低到高排列数的问题。

插入排序法是这么工作的：假设我们必须把下面的数从最小到最大排列，

$$\{5, 3, 1, 6, 4, 2\}$$

按照插入排序法，我们从 5 开始，比较它和下一个数 3，因为 5 更大，我们把两个数交换。再比较 1 和前面的数 5，因为 5 更大，交换。再比较 1 与前一个数 3，再次交换。我们已经排好了前 3 个数。我们比较 5

和下一个数 6，什么也不用做。现在看 6，我们比较它与下一个数 4，然后交换。现在我们就得到了 {1, 3, 5, 4, 6, 2}，而 4 还需要再交换一次找到自己的位置，得到 {1, 3, 4, 5, 6, 2}。接下来比较 6 与下一个数 2，我们进行必要的交换，让 2 找到自己的位置。在下图中我们逐步列出了所有交换。

5 3 1 6 4 2
5 3 1 6 4 2
3 5 1 6 4 2
3 1 5 6 4 2
1 3 5 6 4 2
1 3 5 4 6 2
1 3 4 5 6 2
1 3 4 5 2 6
1 3 4 2 5 6
1 3 2 4 5 6
1 2 3 4 5 6

步骤很多，对吗？这才只有 6 张考卷……是的，这是一种相当慢的方法。在算法语言中，我们说这种方法具有 n^2 量级的复杂度，也就是说，如果我们有 n 个数据（试卷、数字……）要排序，我们需要进行 n^2 量级操作。这意味着，10 个数字对应的量级就是 100，100 个数字对应的量级就是 10 000，而要排序 1000 个数据就需要 100 万次操作。这太多了……

当然有人会提出这样的建议：找出最小的数，把它放在第一位；在剩下的数里面再找出最小的，把它放在第二位；在剩下的数里面再找出最小的，把它放在第三位……是的，也可以这样做。而它也需要 n^2 量

级的操作，和插入排序法一样。

妈妈会怎么做呢？你要知道的第一件事情是，你可以得到的最好的解决方法是用 $n\log(n)$ 次操作实现排序，其中 $\log(n)$ 是 n 以 2 为底的对数。人们已经证明无法做得更好了，至少用今天的计算机是这样的。

但这个操作数（以及完成操作所需的时间）$n\log(n)$ 要比 n^2 小得多。比如，对于 10 个数来说，$n\log(n)$ 的算法要执行大约 $10\times\log(10) = 10\times3.321928$ 次操作，差不多是 34 次，而不是 100 次；对于 100 个数来说，$n\log(n)$ 的量级是 $100\times\log(100) = 100\times6.643856$，大约是 665（相比之下，$n^2$ 是 10 000）；而如果有 1000 个数，其量级为 $1000\times\log(1000) = 1000\times9.965784$，约等于 10 000，而 n^2 量级则是 100 万。我希望这能说服我们采用 $n\log(n)$ 而不是 n^2 的方法来排序。

按字母顺序给试卷排序，或把一列数字从小到大排序的最优 $n\log(n)$ 方法基于所谓的“分而治之”的思路。该方法把试卷分成几叠，把每一叠按照字母顺序排序，最后将它们正确地合并起来，得到完整的排序。在算法上，这被称为“合并排序”算法。

让我们看看如何给同一组数排序：

$$\{5, 3, 1, 6, 4, 2\}$$

首先，把它尽可能分成几个小集合：

$$\{5, 3\}\ \{1, 6\}\ \{4, 2\}$$

给这 3 个集合分别排序：

$$\{3, 5\}\ \{1, 6\}\ \{2, 4\}$$

现在合并前两个集合，比较它们中的第一个数并选择最小的数：

$$\{3, 5\}\ \{1, 6\}$$

1 小于 3，把 1 放在第一位：

$$\{3, 5\}\ \{6\} \rightarrow \{1\}$$

再比较每个列表中的第一个数，把它放在第二位，这回是 3：

$$\{5\}\ \{6\} \rightarrow \{1, 3\}$$

下一个是 5，因此最后一个是 6：

$$\{1, 3, 5, 6\}$$

现在合并 {1, 3, 5, 6} 和 {2, 4}：

{1, 3, 5, 6} 和 {2, 4} → {1}
{3, 5, 6} 和 {2, 4} → {1, 2}
{3, 5, 6} 和 {4} → {1, 2, 3}
{5, 6} 和 {4} → {1, 2, 3, 4}

既然只剩下一个集合 {5, 6}，我们把它放在最后：

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

也许这个例子太简单，你看不出有什么差异，但是相信我，如果有 30 张以上的考卷，这种方法比插入排序法快得多。我们把这种算法，也就是合并排序法，归功于约翰·冯·诺伊曼，他是 20 世纪最杰出的人物之一，哪怕被其他聪明头脑所包围，他也成功地脱颖而出。

还有其他像冯·诺伊曼的算法一样需要 $n\log(n)$ 时间的排序算法，使用时也同样高效。但对于给试卷排序，这个算法是我最喜欢的。

但是，正如我们所说，没有人能比 $n\log(n)$ 做得更好了。当然，妈妈除外。

30　告诉我你用不用 Twitter，我就知道你有没有工作

我们都听说过，有人因为在社交网络不够谨慎而被“炒鱿鱼”，或有人因为 Facebook 而找到工作的案例。但是，除了这些轶事之外，社交网络能否为一个国家的劳动力领域施加更多影响？



随着社交网络闯入我们的生活，我们都不得不适应新的现实：我们可以在网络中看到一切，从陌生人的脚趾甲，到世界另一头的人早餐吃了什么。在更严肃一点的方面，我们也目睹了有人因不善使用社交网络，最终被在线裁员的例子。

抛开这些轶事，似乎不可否认的是，在现在这个时代，这些新的交流工具对于研究人类的行为有非常强大的力量。正是出于这个原因，西班牙马德里卡洛斯三世大学的埃斯特万·莫罗和同事们在特定地理区域的社交网络中寻找行为模式，并试图将它们与该地区的社会经济状况联系起来。

如今，几乎每个人口袋里都有一个设备可以随时随地定位。同样，我们每个人都会或多或少地出现在社交网络中，网络则会几乎永久地整合和留存信息。除了本节开头提到的轶事之外，设备和网络这两个元素打开了一扇大门，开拓了人类行为研究的全新分支，让你可以几乎实时地获得关于迁移运动、时尚趋势或你能想到的任何事物的信息。

莫罗等人的想法基于这样一个事实，即人类的日常行为与其所在地区的社会经济状态相关。根据时间表，从在城市中通行到拨打电话，我们可以从中得到很有趣的社会学信息，无论是对我们生活的国家还是邻国都行之有效。这可以通过不同的方法进行研究，例如调查或人口普查，但这些方法既不能即时得到结果，也不能实时处理问题。但现在，我们拥有前所未有的工具：社交网络。我们在其中不断互动，整理信息，无论是时间表还是地理位置。

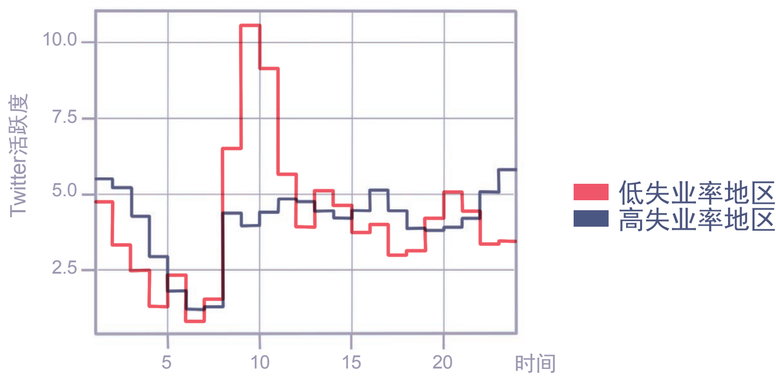
这项工作希望初步尝试用人们在社交网络上留下的个人数据，来描述特定区域的经济和社会水平。这是一篇相当具有技术性的文章[①]，对于非该领域的专业人士来说可能有点复杂，让我来介绍一些有意思的相关性吧。

---

① Alejandro Llorente, Manuel Garcia-Herranz, Manuel Cebrian et Esteban Moro, *Social media fingerprints of unemployment*, 2014.11.19.

首先让我们看看 Twitter 用户的数量。这个数字间接衡量了使用个人计算机、平板计算机或智能手机等社交网络的相关技术程度。已经有研究显示了 Twitter 的使用与国内生产总值之间的直接关系，但是莫罗和同事们从他们观察的数据中发现，Twitter 用户数量越多的地区失业率越高。这个数据令人惊讶——也许不是。你看，你有了一个可以在喝咖啡或小酌时谈论的话题。你觉得为什么会这样？

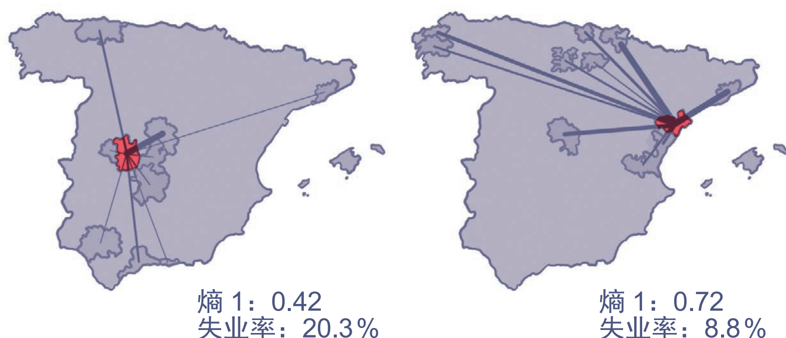
如果我们观察社交网络中的全天活动，就会发现一个地区的经济活动水平与居民在社交网络中的活动之间存在明显的相关性。如果一个地区的失业率较低，我们就会看到早上 8 点到 11 点出现社交网络活动的高峰，之后逐步下降；而在失业率高的地区，我们看到全天都不会出现高峰。从图中可以看出，低失业率和高失业率地区的曲线在不同情况下都非常不同。



红线对应低失业率地区的 Twitter 活动，而蓝线对应高失业率地区。根据红线，我们可以看到早 8 点和 10 点之间有一个活动高峰，这可能与活跃人口的通勤、上班和早餐时间相关。

另一个有趣的相关性涉及不同地区之间的互动。研究人员观察到，与其他地区互动较少的地区通常失业率较高，反之亦然——一个地区与

另一个地区之间的联系数量和频率越高，失业率越低。在文章中，一个区域与另一个区域之间联系的数量和种类被称为“熵 1”，如下图所示，很能说明问题。



在左图中，我们看到一个失业率高（超过 20%）的人群（红色），与其他人群（蓝色）联系不多，熵（衡量互动的值，在 0 和 1 之间）低于 0.5。而在右图中，人群失业率较低（8.8%），而熵超过 0.7。

很有意思，不是吗？至少在我看来是的。我很高兴看到了这篇文章，它向我们展示了研究社交网络对于增进对社会学或用于社会科学的统计的理解非常有用。文章作者还研究了社交网络的其他指标，从活动模式到发送信息中要纠正的拼写，可用于推断某个地区的失业水平。

如果你想从技术角度来更深入地研究这个问题的话，我在第 135 页的脚注中给出了相关参考文献——这个话题够你聊上几天啦。

31 如何拍好自拍……哪怕穿的是条纹衬衫

海滩上张开的双脚、夕阳边的莫吉托，除了这些传统照片之外，现在又有了要借助自拍杆才能拍照的新方法。我们对这种新的自拍方式无能为力，但有一些小贴士可以让这个夏天照相机里的照片更好一点。



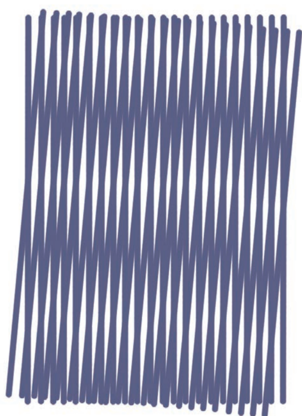
很多人都会在夏天去度假，那也是人们拍更多照片的时候。好，穿上漂亮的新衬衫，去街上拍张自拍吧。但查看照片的时候，我们发现衬衫上的条纹看不太清，并出现了一种奇怪的图案。



我们一次又一次地看这张照片，琢磨着是不是照相机有什么问题，怎么会这样？这东西花费不菲，而且那位推荐它的摄影高手朋友也不会错啊。难道衬衫实际上就是这样的吗？这篇文章的目的就是让你不要抛弃你喜欢的那件衬衫，更不要抛弃那个精密复杂的照相机——说实话，你不太了解它是件好事。

你在照片中看得到，却在衬衫上看不到的那些奇怪的图案被称为“莫列效应”（Moiré effect），正是由于它，云纹织物（法语是 moiré，莫列效应也由此得名）才会产生那些虹彩，人们在多年前非常喜欢它。该效应其实无非是干涉。

实际上，衬衫的条纹可以被看作波，其中波峰是蓝条，波谷是白底（在技术上称为离散波）。那么，当波叠加在类似的波上时，大家都知道会发生干涉。这就是我们在照片中看到的干涉，它有时候会很麻烦。



如果读者细心的话，就会想："要发生干涉，就得有两列波。其中一列是衬衫上的条纹，但……另一列波呢？它是什么？它在哪里？"答案是它在你的照相机里。让我来解释一下为什么会这样。

为了理解它，我先解释一下数码相机如何工作，因为胶片相机不会产生这种现象。我们想要捕捉的图像的光线在通过镜头后会打在由数百万个感光元件组成的传感器上。每一个感光元件都被称为一个"像素"。（值得注意的是，每个感光元件都只捕捉射到上面的光的强度，所以严格来说，照相机中的传感器只捕获灰度。但如果在每个感光元件前放上蓝色、绿色或红色的滤光镜，只让这些颜色的光通过，那就能够得到重建原始图像的颜色所需的信息。）

当然，这些像素按照网格分布在传感器中，而这个网格就是形成引发如此烦人的莫列效应的另一列波。因此，一列波来自你的衬衫，另一列波则来自你的照相机。我们可以做些什么来避免它呢？

首先，我们注意到这个干涉是在波长相似（或是彼此的倍数）时产生的。我们要做的是尽量避免这种相似性，为此我们有几种手段。在理想情况下，我们的照相机可以以 1∶1 的比例重现我们刚刚拍摄的图像，

来看看是否会出现这个问题。如果这个问题出现，我们必须设法避免它。两种较合理的做法是改变照相机与目标之间的距离（要么靠照相机变焦，要么靠移动）和（或）稍微转动照相机以避免干涉。还有其他技术性更强的方法可以看看光圈的大小，但如果我们不是专家，就可能并不能保证光线合适。

笑一个，可能有人正给你拍照呢。

32　莎士比亚喜欢逻辑题

每当读书日临近，媒体上就会充斥着塞万提斯和莎士比亚等大作家的名字。但并非所有书籍都是关于癫狂的骑士或不可能的爱情，还有很出色的科学书籍。这里我们把二者结合起来：一起来谈谈莎士比亚和数学逻辑吧。

在世界上使用人数较多的几种语言中，代表其中两种语言的最伟大的文学巨匠——塞万提斯和莎士比亚通常被认为都在 1616 年 4 月 23 日去世。不过，两人去世的时间实际相隔十天……因为当时在英国使用的是儒略历，尚未进行格里历的改革，而西班牙则是实施格里历最早的国家之一。

顺着科学的话题，这项历法改革的最终报告是由西班牙数学家、托莱多人佩德罗·查孔为教皇格列高利十三世编订的。由一位数学家来进行改革，可真是巧了。既然说到了数学的话题，我们就来看一个与英国埃文河畔斯特拉特福的诗人相关的问题吧。

莎士比亚最著名的作品之一《威尼斯商人》中有一个科学性的有趣段落。巴萨尼奥面前有几个匣子，他必须挑中装有他心爱的鲍西娅画像的匣子才能够娶她。在作品中，主要线索是每个匣子的材料（金、银和



铅，我不想透露哪个是正确的选择）。但要证明巴萨尼奥的智慧，给出另一种类型的线索也许更为合适。好吧，假设我们有两个匣子，一个是金的，另一个是银的，而对于每个匣子，鲍西娅的父亲——设计这个系统来为女儿招亲的人给出了下面的铭文：

- 金匣："画像不在这里。"
- 银匣："铭文中只有一句是真话。"

他告诉巴萨尼奥，每个铭文都既可能是真话，也可能是假话。通过这些提示，巴萨尼奥已经拥有了找到爱人的肖像所需的一切。这个谜语似乎是不可能解开的，因为我们不知道这两个铭文是都是真话，还是其中一个（或两个）是假话。但要牵到鲍西娅的手，他必须得机灵才行。我们怎么才能解开这个谜团呢？

让我们来看看银匣。它的铭文上写着“铭文中只有一句是真话”，这可能是真话，也可能是假话。我们再来看看在每种情况下金匣会怎么样。如果银匣上的铭文是真话，那么它就是唯一一句真话，因此，金匣上的铭文就是假话，所以金匣中装着鲍西娅的画像。另一种可能是银匣上的铭文是假话，这意味着要么两句话都是真话，要么都是假话。然而，我们知道不可能两句话都是真话，因为刚刚说过银匣上的铭文是假话，因此两句话都是假话……画像在金匣里。所以，无论银匣上的铭文是真是假，金匣上的铭文总是假话。如果巴萨尼奥稍微想一想，就会推断出那幅画像在金匣里，无论是鲍西娅的父亲还是邪恶的夏洛克都无法将他们拆散了。

这个精彩的谜题是从博客 mathsformortals[①] 中摘录的。（但老实说，我认为它找到答案的方法有点麻烦。）

在同一个博客中，还有另一个类似性质的问题，我就把它留给你解决吧。我们还保留最初的 3 个匣子，上面的铭文分别是这样的：

- 金匣：“画像在这里。”
- 银匣：“画像在这里。”
- 铅匣：“至少两个匣子上的铭文是假话。”

鲍西娅的画像在哪里？你可以试着找答案，借此证明你是鲍西娅的完美追求者，或者，证明你不仅擅长数学逻辑，而且喜欢文学呢。

---

① Eric Emmanuel Macaulay, *A problem courtesy of Shakespeare, mathsformortals*, 2007.11.29.

33　拍卖的类型

你去过拍卖会吗？哪怕没有，我相信你也在电视上看到过激动人心的拍卖节目。但是，你知道多少种类型的拍卖？你能设计出让拍卖者显著受益的拍卖吗？进来报个价吧。



今天的电视节目向我们展示了世界上许多五花八门的迷人事物，比如机械车间、当铺或拍卖行。有人可能觉得数学没有在任何一个地方发挥作用，但我们只要琢磨一下，就会发现拍卖是博弈的一种特例，而且我们知道数学有一个分支专门研究博弈。实际上，我们脑子里一下子就会涌现很多类型的拍卖，而我们会展示设计恰当的拍卖如何能让拍卖者（通过博弈论）赚到大笔的钱。顺便提一下，各国政府利用这种类型的拍卖来获得最大利益。

如果我们问问别人知道什么类型的拍卖，他通常的回答是两个：加价拍卖（我们在电视拍卖节目中看到的，或艺术品拍卖）和降价拍卖（比如鱼类批发市场中常用的）。如果我们再追问下去，人们可能还知道另一种拍卖，它更接近我们想要谈论的内容：密封投标的拍卖。在这种拍卖的规则中，每位竞标者只有一次展示报价的机会，而该报价（理论上）对其他竞标者不可见。这是公共项目招标中最常用的方式（在这种情况下，人们选择承诺满足某些要求的最低的报价）。其优势在于，除非有人使诈，否则销售价格不会偏离实际价格太远。

有了上面提到的 3 种方法（及其变体），你可能觉得拍卖界中的一切都已经被发明出来了。直到 1961 年，美国哥伦比亚大学的数学家和经济学家威廉·维克里又提出了一种密封投标拍卖的变体。虽然它自 19 世纪末就时有使用，却没有得到充分的分析或普及。在维克里拍卖中，每位竞标者都用密封的信封展示报价，报价最高者会赢得拍卖，但他要支付的却是次高的报价。有趣的是，人们已经证明，这种策略以某种方式迫使投标人报出自己认为最公平的价格。

在普通的密封投标拍卖中，每个投标人面临的危险是出价太高：他会赢得拍卖的对象，却要支付过高的价格。而在维克里的方法中，由于要支付的价格不是由投标人自己的报价决定的，人们就不大会报价太高，而是尽可能报出自己认为能够赢得拍卖的合适价格。多个结果和模型证明了上述说法。

但是，在某种程度上，维克里模型的重要之处在于它为设计和分析拍卖方法开辟了一个新的领域。因此，对于某些特定的产品，人们会使用一些已被证明非常有效的变体。例如，一种已被广泛分析的拍卖是英国的电话许可证拍卖，这是美国无线电波段拍卖机制的变体：同步加价拍卖。这种方法最初由美国斯坦福大学的保罗·米格罗姆提出，有几篇研究称它已为美国政府带来了 5 亿美元的额外收益。

这种拍卖如何进行呢？它是加价拍卖的变体，在出售多个通常类似的产品时使用。其思想是，所有竞标者都可以对拍卖的任何产品（同时）投标，并且在没有人再为任何产品出价之前不会结束拍卖。我们可以得出什么结论呢？因为没有人想空手而归，所以当他发现自己无法得到其中一种产品时，他可以竞标价格更低的另一种产品，从而让卖方获得更大的整体收益。

当然，在这种情况下，所有竞标者都必须知道其他竞标者的报价。例如，在英国，对于移动电话许可证有一个信息透明的网页可以实时查看每个报价，并自动完成整个过程，从而实现更高的收益和透明度。

拍卖的类型还有很多，但我们讨论的这些是主要的拍卖类型。你看，我们可以根据要实现的目标来选择拍卖方法——正常情况下，逻辑上也合理的结论就是组织拍卖人的最大利益。或许，如果政党在一个密封的信封中展示自己的施政纲领并被迫遵守自己报出的承诺，那就太好了。这总比现在他们说了不算数要好吧，你觉得呢？

34 瓶子里有多少糖？

你打过猜玻璃罐里有多少糖果或玻璃球的赌吗？不管怎么说，你应该目睹过电视有奖答题节目中“求助现场观众”的集体智慧。我给你几个无风险赌注的提示，不用依赖他人，只会用到数学，还有你的智慧。



1906 年，英国普利茅斯举办了一场“牲畜博览会”，对统计学、心理学和经济学三个学科产生了巨大影响，并由此产生了所谓的“集体智慧”的说法。这也是维基百科的协作方法产生的基础之一。在那次交易会期间举办了一场比赛，其中一项内容是猜一头牛有多重。统计学家弗朗西斯·高尔顿爵士收集到比赛中 800 名参赛者给出的数据，并证实其中位数（有 50% 的值比它小，50% 的值比它大）与正确结果的差异不到 1%——猜测值的中位数是 543 千克，真实值是 545 千克。正如发表于《自然》杂志上的那篇文章所说，它比绝大多数参赛者的猜测都要准确。

我在这里要弱弱地插一句，协作方法也是有问题的：我们都见过各种各样的错误，结果这些错误通过互联网传播却变成了“真相”。这种例子有很多，高尔顿研究的猜牛问题就是其中一例。一些博客（错误地）说这个博览会是在巴黎举办的，并且绝大多数博客都说高尔顿研究的是平均值（而不是中位数）。还有人毫无根据地说他参加了博览会（原文读者并不会得出这个结论），在之后给编辑的信中，他表示有人建议他将平均值作为对牛的重量的估计值。（有位胡克先生对高尔顿列出的少量数据进行了精确的计算，并考虑到样本的平均值应该和总体的平均值类似。）

有几个使用集体智慧的例子，其中既有正面例子也有负面例子：一方面，答题节目《谁想成为百万富翁？》中的“求助现场观众”是一个普遍正面的例子（虽然我们也可以发现观众会犯下许多令人惊讶的错误）；另一方面，1999 年，加里·卡斯帕罗夫战胜了约 50 000 名来自 75 个国家的国际象棋玩家就是一个负面的例子。

但是，我想把重点放在通常用于说明集体智慧的另一个例子上：在一群人面前展示一个装满糖果的玻璃罐，每个人都试着猜里面有多少糖果。同样，我们知道所有结果的平均值通常是对瓶中物体数量的良好估计。但我不打算重复那个实验，而是像卡斯帕罗夫那样击败集体智慧：

试着利用一点点数学（有些数学知识众所周知，有些则不然）尽可能准确地估算瓶中物体的数量。

首先来假设最简单的情况：糖果是球形的，许多糖球都是这样的。我们来估计瓶子的体积：通常瓶子是圆柱形的。

理想情况下，如果我们能被允许观察瓶子一段时间，那就可以数一数从底部能看到多少糖果，也就是铺满一层的糖果数量，接下来再计算糖果有多少层（根据瓶子的高度），两个数字相乘就可以得出一个很好的估计。

但最常见的情况是这种方法行不通，由于糖果并不是完全按层排列的，这会导致误差。还是来估计一下体积吧。对于瓶子来说，它的大小通常可以给出关于体积的线索（比如我们可以认出 1.5 升的瓶子）。如果不行的话，可以看看基于任何单位（不管是糖果的长度还是厘米）的底部半径（R）和瓶子高度（h），那么体积就可用 $V_B = \pi R^2 h$ 求出（利用手机上的计算器）。在同一单位下，估计糖果的体积（如果 r 是糖果的半径，其体积为 $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$），那么糖果数量的初步估计值是 $N = V_B / V_C$。

但这意味着瓶中没有留下任何空隙，而我们知道这是不可能的，所以我们必须找到空出了多少空间。这是一个古老（并且非常困难）的问题，早就由开普勒提出来了，他当时想知道存储加农炮弹的最有效方法。我们知道最高效的球体堆积占据大约 74% 的体积。我们觉得瓶子里面达不到这样的堆积效率，并且已知[①]它通常占据 64% 的空间，所以瓶中合理的糖果数量应该是 $N = 0.64 V_B / V_C$。

现在来看看我们的糖果是什么样的。估算思路是一样的：试着测量糖果体积，但现在就要考虑到糖果的堆积因子了。如果糖果是 M&M’s 巧克力豆，它是一个椭球体，其堆积因子更高：75%。如果有人好奇

① *Study of the random pouring of oblate spheroids has implications for the design of high-density ceramic materials for use in aerospace*, Yenra, 2004.03.27.

的话，上网搜一下（集体智慧）就会看到，M&M’s 巧克力豆的体积为 0.636 立方厘米，长轴直径为 1.04 厘米，短轴直径为 0.4 厘米。有趣的是，根据上面给出的研究，可以计算出 M&M’s 巧克力豆的堆积通常更高效，这时的公式为 $N = 0.68V_B/V_C$。

如果不是糖果而是硬币怎么办？我们改天再说吧，现在你得自己琢磨如何下这个赌注了。

35　鸽子比我们更聪明？

当你在公园散步时，肯定诅咒过给你的衣服上留下了“礼物”的那些鸽子。然而，这些不讨人喜欢的鸟类具有出人意料的品质。心理学研究人员进行的一项实验表明，例如在面对蒙提霍尔问题时，它们有时会比人类更聪明。

蒙提霍尔问题是什么？我们用几句话总结一下吧。曾经（差不多是 20 世纪 60 年代）美国有一个电视游戏节目叫作《达成协议》（*Let's Make a Deal*），主持人是蒙提·霍尔。在这个节目中，参赛者必须在 3 个门之中选择才能拿到最终的礼物，他们知道其中两个门后是山羊，而另一个门后是汽车。

可以想见，所有参赛者都想赢得汽车。一旦参赛者选择了一扇门，主持人就会打开另外两扇中藏了山羊的一扇门，并给参赛者改变选择的机会，也就是改成他当初没选的门中依然关闭的那扇门。聪明的做法永远是改变选择，因为它会使获胜的机会翻倍。当你第一次选择时，你选的门后有 1/3 的概率藏着汽车，因此汽车藏在你未选择的门后的概率为 2/3。而这 2/3 的概率都集中在主持人尚未打开的那一扇门上。因此，如果你换门，你的获胜概率会翻倍。很清楚，对吗？



嗯……并不是，这个事实并不是对每个人来说都那么明显，因为有些人认为在主持人打开了有山羊的一扇门之后，剩下的两扇门中藏着汽车的可能性是 50%。但这不对，不是这样的。想象一下有 1000 扇门：你选择的门后藏着汽车的概率是 1/1000。汽车在你未选择的某一扇门后的概率是 999/1000。如果主持人打开了 998 扇你没有选且没有奖品的门，那么唯一你未选择而又关着的门后将有 999/1000 的概率藏着车。你换不换？

回到最初的问题，就像我说的那样，有很多人认为改变选择不会提高获胜的机会，无论你多么努力地解释这会让机会加倍。关于这一点，鸽子比人做得更好。在 2010 年发表的一项实验研究中[①]，美国惠特

① Walter T. Herbranson et Julia Schroeder, *Are Birds Smarter Than Mathematicians? Pigeons (Columba livia) Perform Optimally on a Version of the Monty Hall Dilemma, Journal of Comoarative Psychology*, vol. 124, n°1, 2010, p. 1-13.

曼学院的 W. T. 赫布兰森和 J. 施罗德的结论是，经过一定数量的重复实验，鸽子决定改变初始选择的比例（它们是这个比赛中最聪明的）——听好了——达到了 96.33%！相比之下，参加类似实验的人有 65.67% 在经过多次重复游戏后会改变他们的选择。必须要说的是，在这些条件下 65.67% 与 50% 区别不大，这表明在人类实验中，一部分人没有学到任何东西。这也许是因为人类会受到迷惑条件的影响，而鸽子不会。

虽然这篇文章没有说，但我的收获在于，如果一个人在多次重复实验后，发现奖品藏在他没有选择的门后，他却不认为最好的做法是换门，而是觉得只要重复选择足够多次（他就是我们前面说的，觉得概率是 50% 的那种人），那么下一次就会风水轮流转。这就是所谓的“蒙特卡洛谬误”。

不过还是来看看鸽子吧。我要在这里声明，实验中没有任何类型的动物虐待。基本上，鸽子被放在 3 个亮白灯的按钮前面。这 3 个按钮与 3 个隔间相连，其中两个随机的隔间是空的，而另一个隔间则有非常好吃的谷物供我们的主角享用。

第一步，鸽子啄其中一盏白灯，做出它的选择。然后，鸽子未选择的、对应不含谷物的隔间的一盏灯会熄灭（就像蒙提·霍尔打开藏有山羊的门一样），剩下的两盏灯会亮起绿色：鸽子要在第一次选中的灯和另一盏尚未熄灭的灯中做选择。

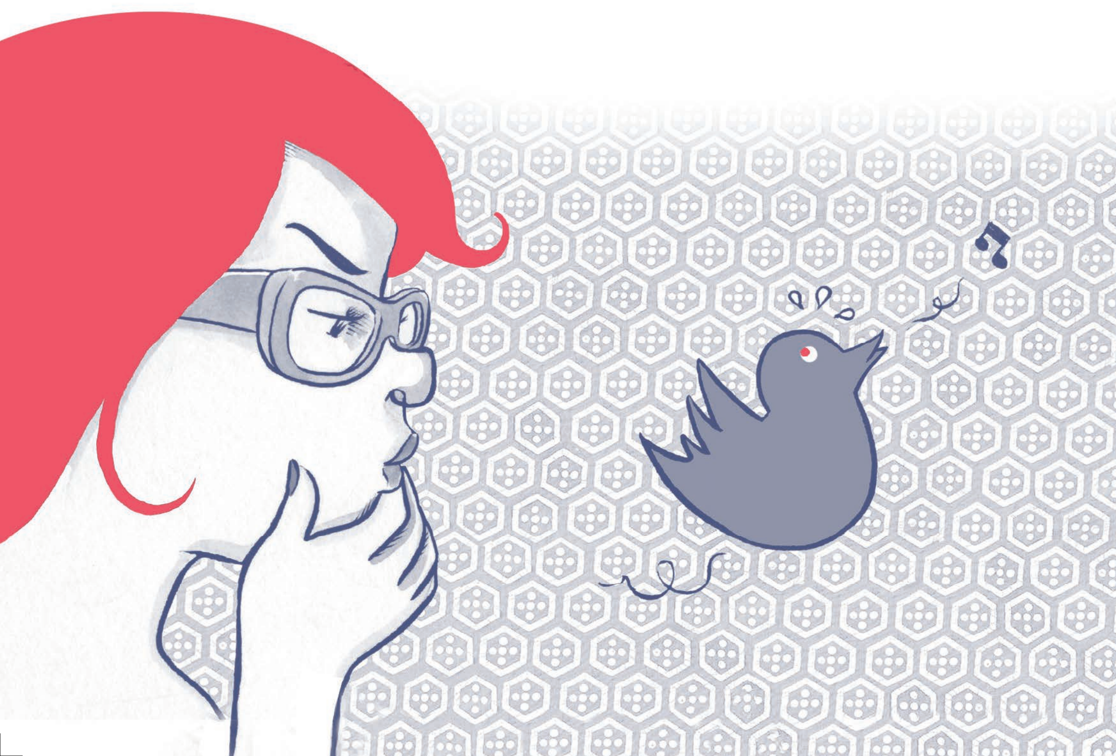
这两盏灯都可能对应有谷物的隔间，虽然我们知道其中一盏灯的概率是 1/3 而另一个的概率是 2/3。结果，在实验的第一天，36.33% 的鸽子（这是最聪明的那些鸽子）改变了它们的初始选择。在连续重复实验 30 天后，96.33% 的鸽子改变了初始选择（这是正确的）。在人类（学生）中进行的类似实验表明，在实验的第一天决定改变选择的人（56.67%）和实验 30 天后改变选择的人的百分比几乎没有差异（65.67%）。

这是否意味着鸽子比人类聪明？我不是这个问题的专家，但我会说，比如，它们在进行概率推理时比我们受到的影响更少。好吧，它们头脑中的东西比较少，所以也没有什么好的。

不管怎样，如果你有朝一日发现自己面临类似于蒙提霍尔问题的情况，而你改变了第一选择，我就很高兴了，因为你获胜的概率将翻倍。

36　利用本福特定律检测垃圾消息

社交网络作为内容传播工具的力量没有被商人、兜售伪医学的骗子和各种理论家所忽视。美国马里兰大学最近的一项研究提出使用本福德定律检测这些“流氓账户”。



最近，Twitter 上的“机器人”如雨后春笋般出现，热情地喊着来自主人（比如营销号）的口号。它们试图将“热门话题”变得有利于某人或某种产品。这种现象往小了说十分烦人，往大了说就会干扰社交网络的正常运行。

有人可能会认为这无足轻重，但事实并不是这样的，因为如果这些“机器人”能够（人为地）产生某种趋势，就会得到不应得的关注。当然，检测它们的方法有很多，但我们将描述一种非常简单有效甚至令人惊讶的方法：使用本福特定律（也称为“第一位数法则”）。

我想首先应该解释一下什么是本福特定律，为此我们得说说对数。不要害怕，只要知道人们一度常常用它就好了。实际上，对数是一种神奇的工具，可以将复杂的运算转换为更简单的运算：乘法变成加法，指数变成乘法，开方变成除法。太好了。正由于此，在计算机出现之前，对数非常常用（它是 50 年前工程师必不可少的计算规则的基础），任何不得不进行烦琐计算的人都会花很多时间来查对数表。对数表被印成一本书，按照我们要查的数的第一位数字排列。比如，如果我们想知道 145 的对数是多少，我们就会查看“1”的那几页。

就这样，1881 年，数学家和天文学家西蒙·纽科姆观察到，他和他的同事使用对数表前几页的频率要比最后几页高得多。这显然有问题，因为要查的数字应该或多或少是均匀分布的，人们预期所有页面都会出现同样的磨损。由此他推断出，他们工作所用的数字的第一位数不是等概率出现的，而是 1 出现得最频繁，其次是 2，以此类推到 9。

为什么会这样？我们不会深入解释，但假设我们在两个数字，比如 1 到 25 之间随机选择一些数字：显然任何数字都有可能被选到，但如果我们看第一位数字，有 11 个数以 1（1、10、11……）开头，7 个数以 2 开头，以其余数字开头的数各只有 1 个。继纽科姆的发现 50 年后，物理学家弗兰克·本福特也发现了这个性质，但荣耀却属于他，因

为定律以他的名字命名。有趣的是，这个定律已用于因条目不符合预期分布，判断某些账户是否有错误。

当然，有一些数字列表不遵循本福特定律，但在大多数情况下，这些异常现象都可以找到解释。例如，当“巴塞纳斯文件”[①]公布后，一位数学家指出，这些文件中出现的数字并不遵循本福特定律，因此判定数字被做了手脚。更具体来说，其中 6 出现的频率比本福特定律预测的高得多。但是这位数学家并没有意识到，这个数字因为从比塞塔[②]转为欧元（2002 年）而出现得更频繁，而且它来自以 1 开始的数字：如果把一切都转换回比塞塔，本福特定律将再次被验证。

但现在让我们回到文章开头的问题：如何使用本福特定律检测 Twitter 机器人？马里兰大学的詹妮弗·格尔贝克使用的方法是研究所谓的“自我中心网络”：对于给定的顶点，她查看了其关注者的数量和其关注的人的数量。她由此指出，在研究的 21 000 个案例中，绝大多数数字列表遵循本福特定律，除了与 170 个账户相关的数据。这些账户绝大多数明显是垃圾消息机器人，其中很多是俄罗斯账户，它们摘录著名作品中的片段，没有什么明确的目标。实际上，这 170 个账户中只有两个看起来像是普通用户。

① 指与西班牙人民党的前任司库巴塞纳斯涉嫌贿赂、洗钱、税务欺诈相关的文件。

② 比塞塔是西班牙及安道尔在 2002 年欧元流通前所使用的法定货币。——译者注

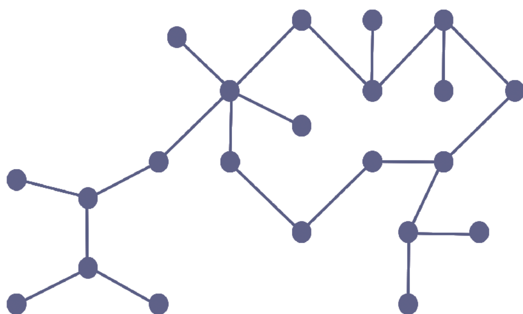
37　要剪断多少电缆才能切断互联网？

美式咖啡、流行病传播、社交网络和陶罐之间有什么联系？你肯定听说过六度分离理论，它认为世界上任何两个人之间的间隔都不超过 6 个中间人……但如果有人切断其中一个连接怎么办？

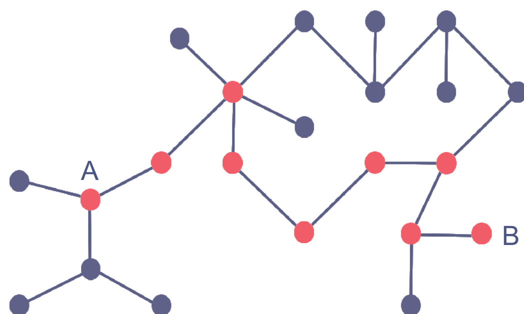


如果要将一组用户从网络中隔离开来，或为阻止流行病的传播，必须剪断多少“电缆”，也就是连接呢？尽管看起来令人难以置信，但这些情况中的某些现象都可以通过同一种理论——渗透理论来建模。

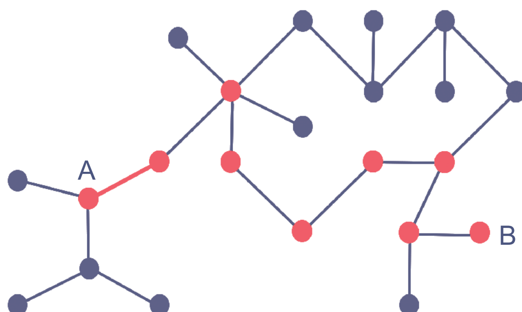
虽然物理学、化学和各种工程学中都有对渗透的研究，但今天我们关注组合模型，也就是和图一起使用的模型。万一你忘了，我提醒你，图由一组点（我们称之为“顶点”）和连接某些顶点对的线（我们称之为“边”）组成。下面就是一张图：



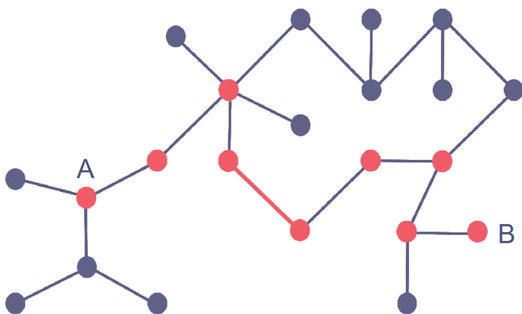
假设在上面的图中，顶点（点）代表了一些小学生的家庭，然后在彼此了解的家庭之间连上一条边。由于这张图很小，很容易看出，在这个例子中，任何家庭都可以向任何其他顶点发送消息，要么直接发送，要么通过他人发送。如果下页图中的 A 家庭想要向 B 家庭发送消息，很明显，一种可能性是使用红色的顶点作为中介。



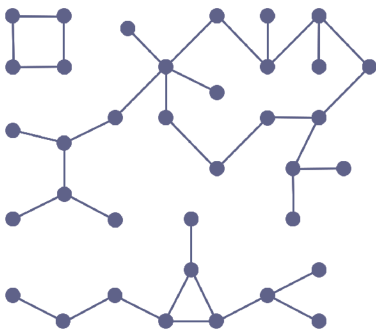
同样显然的是，如果某些友谊破裂，A 可能就无法与 B 沟通。例如，如果下图中红色边表示的友谊破裂。



而其他关系破裂不会影响 A 和 B 之间的沟通，因为他们有其他选择。例如，我们在下页图中用红色表示的那一条边。



我们也不难看到，如果一个班级学生的家庭之间的关系如下图所示，那么有些顶点永远无法与他人交流，因为它们被分隔成 3 组，彼此之间没有连接。



好了，简而言之，这就是渗透理论研究的东西。它研究的是信息何时可以从图的一个顶点到达其他任何一个顶点。就像水渗过美式咖啡机的过滤器或透过陶罐的内壁一样，信息在什么条件下可以从系统的一侧流到另一侧？让我们看另一个例子吧。假设有一个网格，比如一个非常大的棋盘格。在每个格子中，我们都以一定的概率 p 放置一个棋子（那么不放棋子的概率就是 $1-p$）。如果通过抛硬币来决定的话，那么 p 就是 1/2，$1-p$ 当然也是。

问题是：如果我们从棋盘的一侧出发，我们能否通过国际象棋中“王”的运动到达对面的一侧，而且从不踏上已经被占的地方？对于什么样的 p 值，我们可以保证它几乎总是可能的？换句话说，想象一下你要从棋盘的一侧滑到另一侧，棋子是你的障碍；或者说“王”是一个能穿过多孔介质的水分子，我们想知道该分子何时可以完全穿过多孔壁。

在下图中，我们使用棋盘对不同的 p 值进行了仿真。注意，p 值越高，占据的格子（蓝色）越多，从左到右渗透（流动）就越复杂。

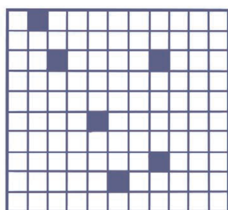


图 1 $p = 0.05$

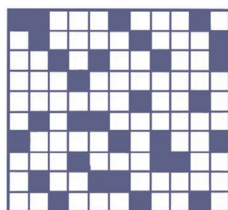


图 2 $p = 0.248$

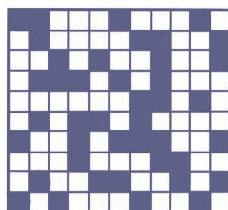


图 3 $p = 0.347$

那么，对于什么样的 p 值，我们可以确保“王”能从棋盘一侧走到另一侧呢？事实上，我确信你知道如何计算：只要我们放置棋子的概率 p 小于 0.67680165，就几乎可以保证“王”能从一侧到达另一侧。这从一开始就很显然，对吧？好了，不开玩笑了，研究图中这种类型的渗透问题并不容易，但它可以用于研究复杂的互联网络（电话系统、计算机网络等），比如了解它们在某些节点随机失效时的脆弱程度（比方说，有人切断了网络中的某些电缆）。

好了，我提醒你啦：在切断电线或友情之前，请确保没有断开你与自己感兴趣的事物或人之间的联系！

38　邮递员与垃圾车的路线

你肯定有过去一个不熟悉的城市旅游，然后多次走过同一条街道的经历。如果一辆垃圾车甚至邮递员反复走过一条街，那问题就更大了。数学可以帮助我们有效地设计路线吗？当然可以。



为垃圾车或邮递员设计高效的路线，无须多次走过同一条街，可以节省时间、金钱，就更不用说污染了……这件事数学可以帮忙。事实上，这是一个在数学史上具有特殊地位的问题：因为它是第一个由图论提出和解决的问题，标志着这门学科的诞生。

我们在第 16 章中讲过，那是 18 世纪，一个名为哥尼斯堡的普鲁士城市位于普列戈利亚河口，城中有 7 座桥。必须要说，哥尼斯堡在桥周围的地形有点特殊，城市被普列戈利亚河分成了 4 个部分，如下图所示：

哥尼斯堡

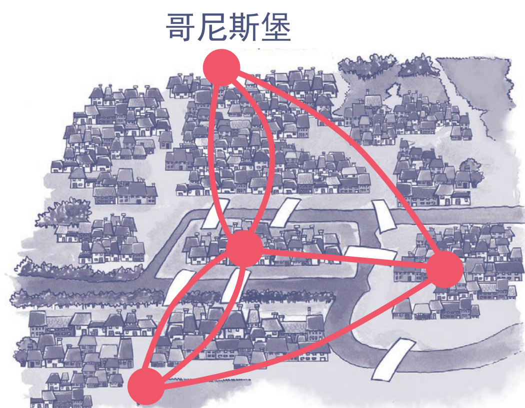


在那个时代，有人提出这样一个问题：从哥尼斯堡的任一地点出发，是否有可能选择一条路线，恰好走过普列戈利亚河上的 7 座桥各一次？这个问题被称为哥尼斯堡七桥问题。请注意，在这个问题中，路线的起点不必与终点重合。而这又带来了另一个问题：你能设计一条在城市的同一点开始和结束的回路，通过哥尼斯堡所有的桥各一次吗？

这两个问题的答案都是历史上最优秀的数学家之一莱昂哈德·欧拉给出的，他在 1736 年提出了图论。事实上，这个结果不仅适用于普列戈利亚河上的桥，而且可以帮助我们知道，是否有可能在城市中设计一

条回路，且不经过同一条街道两次。

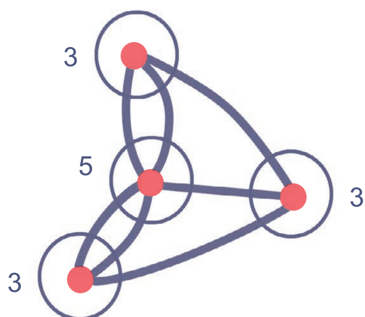
实际上，七桥问题可以表示为下图：顶点（点）代表城市每个区域，边（连线）代表连接两个区域的桥。



那么哥尼斯堡七桥问题就转化为以下问题：无须把笔从纸上抬起来，且不重复任何线条，我们是否可以画出红色的图，并在同一个顶点开始和结束？

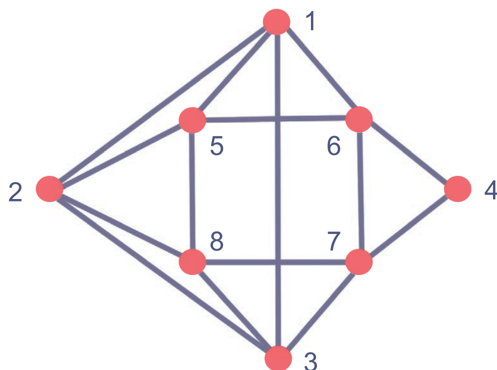
根据欧拉定理，这两个问题的答案都是否定的。实际上，为了纪念他，能够遍历（在相同顶点开始和结束）所有边且不重复的图被称为“欧拉图”。当且仅当从每个顶点出发的边（线）的数量都是偶数时，图才是欧拉图。而当且仅当图中有两个连到奇数条边的顶点时，图中含有欧拉路径（从一个顶点出发，到另一个顶点结束）。

如果我们看看哥尼斯堡七桥对应的图，数一数从每个顶点出发的边，就会发现所有顶点都连接到奇数条边。因此它不是欧拉图（找不到一条从同一顶点开始和结束的路径，遍历所有边而不重复；它也没有欧拉路径——它在不同的顶点开始和结束）。



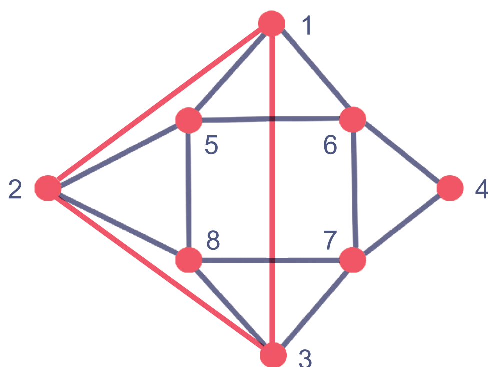
除了桥的问题之外，对一张图是否是欧拉图的研究也适用于任何需要穿过所有街道，且无须通过同一条街道超过一次的路线设计问题，例如垃圾车或邮递员路线。当然，这是在可能的情况下，因为这并不总是能做到的：我们已经说过，如果有任何顶点连到奇数条边，就不可能找到这样的回路；而如果有两个以上的顶点连到奇数条边，那么连欧拉路径都找不到了。

好吧，如果可以的话，我们该怎么做？也就是说，如果在我的城市对应的图中所有顶点有偶数条边，那么应该如何安排路径才能不经过同一条街两次呢？有一种非常简单的方法可以做到这一点。想象一下我们城市街道的图是下面这样的（这个城市非常小，但作为例子很好）。

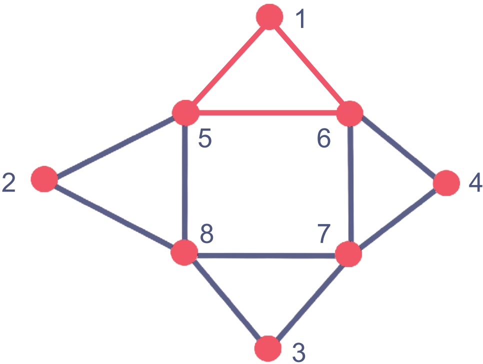


如果数一数从每个顶点出发的边数，就可以验证它们全都是偶数。因此，我们可以找到一个欧拉回路，通过且仅通过每条边各一次，在同一个顶点开始和结束。在这个简单的例子中，我们可以尝试用肉眼找到这个回路，但是实际例子对应的图要大得多，我们还是用算法来找回路吧。实际上，德国人卡尔·希尔霍尔策的算法向我们展示了欧拉定理的难点（到现在还没有完全显示出来）。

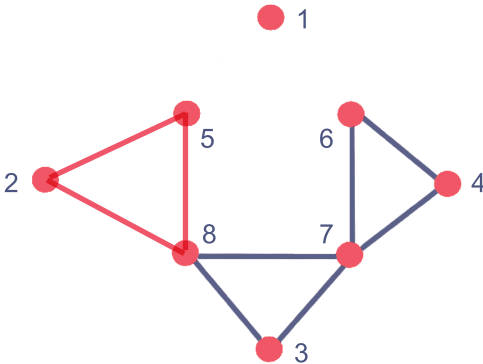
首先，我们寻找一个简单的回路（或环），比如从顶点 1 出发的回路，它不必遍历所有顶点。回路 (1, 2, 3) 就满足这一条件。我们用 C 来表示这些顶点形成的集合，$C = \{1, 2, 3\}$。



然后，我们擦掉红色的路线，再寻找另一个穿过 C 中已经存在的顶点的回路，比如回路 (1, 5, 6)。现在，在集合 C 中，我们将元素 1 替换成元素 (1, 5, 6, 1)。那么 $C = \{1, 5, 6, 1, 2, 3\}$。



我们再次擦掉红色的路线，继续寻找另一个通过 C 中顶点的回路。好的，我们找到了 (2, 5, 8)。在 C 中，元素 2 被替换为 (2, 5, 8, 2)：$C = \{1, 5, 6, 1, 2, 5, 8, 2, 3\}$。

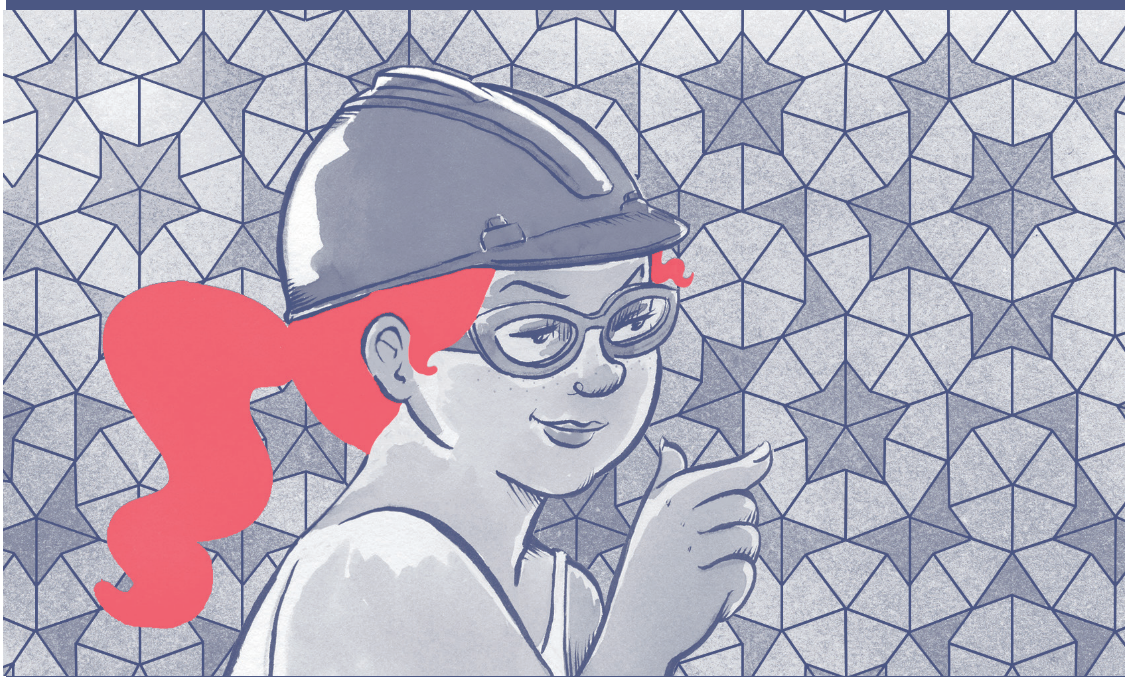


我们擦掉红线并继续重复上述步骤，比如找到 (3, 7, 8)，于是 $C = \{1, 5, 6, 1, 2, 5, 8, 2, 3, 7, 8, 3\}$。最后找到 (6, 7, 4)，我们得到 $C = \{1, 5, 6, 7, 4, 6, 1, 2, 5, 8, 2, 3, 7, 8, 3\}$。这样，我们就拥有了走过所有边而没有重复的回路，我们只需要在集合 C 的末尾加上 1 就行了。如果你的图中没有欧拉回路，而只有一条路径，即它在不同的顶点开始和结束，那是因为它有两个奇数度的顶点：我们称它们为 X 和 Y。现在你加上一个顶点 Z，把图中的 X 和 Y 连接起来，并应用我们刚才所说的方法。完成后，把 C 中的 Z 擦掉就可以找到你要的路径。

你看，我说数学对所有人都有用……现在去看看你能否在附近的街区或你所在的城市找到欧拉回路吧。

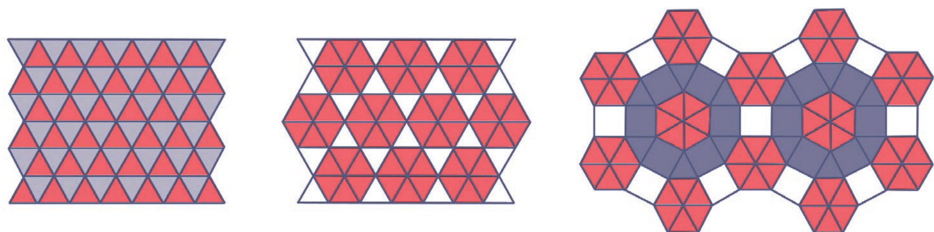
39　彭罗斯和周期平铺是怎么回事？

夏天就是捣鼓房子的时候。牺牲了夏天的休息让家里焕然一新——有些人是出于必要，而有些人只是为了换个风格，做一些与众不同的事。但是，如果要说有什么东西总是既美丽又不同，那就得数彭罗斯马赛克了。你敢用它装饰浴室吗？

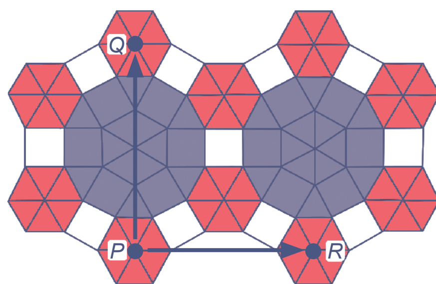


马赛克被用作装饰元素可是有十分悠久的历史了。很明显，重复的图案总是对人类产生强大的吸引力。许多洞穴壁画中就已经出现某些重复图案了，从某种意义上说，我们可以说西班牙装饰的巅峰就是美妙的阿尔罕布拉宫。人们经常谈起阿尔罕布拉宫如何对荷兰画家莫里茨·科内利斯·埃舍尔的创作产生了决定性的影响。但无论是阿尔罕布拉宫还是埃舍尔的作品，重复都在其中起着重要的作用。但今天我们要讨论一些以“不重复”为基本要素的马赛克，而且它们还很美，至少从数学的角度来看很美。下面，我们来谈谈“非周期性马赛克”。

要了解什么是非周期性马赛克，让我们首先看看周期性马赛克是什么。比如，我们可以用几种不同形式的瓷砖平铺整个平面，如图所示。

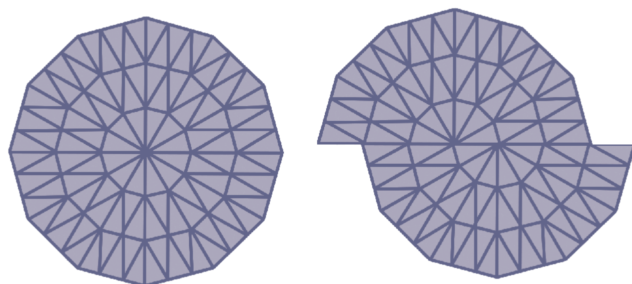


这些铺法的共同之处在于，使用的瓷砖是等边三角形、正方形或两者的组合。它们还有另一个属性：在平面的一小部分里，我们已经得到了扩展铺设的规则，也就是如何周期性地重复铺设，直到覆盖整个平面。在某种意义上，关键在于给定铺设中的任一点 P，我们都能够在两个非平行的不同方向上找到两个点 Q 和 R，不管你站在这 3 个点中的哪一个点上，马赛克看起来都完全相同。这就是所谓的周期性马赛克。



在上图中，如果我们选择点 P，我们可以在两个非平行方向上找到 Q 和 R，而且站在这 3 个点上，马赛克看起来都是完全一样的。我们可以选择马赛克中的任何其他点作为 P。

现在让我们来看一个非周期性马赛克的简单例子，它只使用了一种类型的砖：全等的等腰三角形。

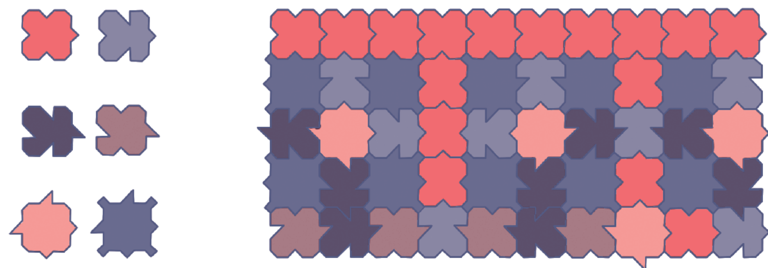


如果我们（在上图中）站在马赛克的中心点上，那就没有任何其他点使马赛克看起来完全相同：这就是所谓的非周期性马赛克。我们现在知道了，对于等腰三角形，我们可以以周期性或非周期性的方式来铺

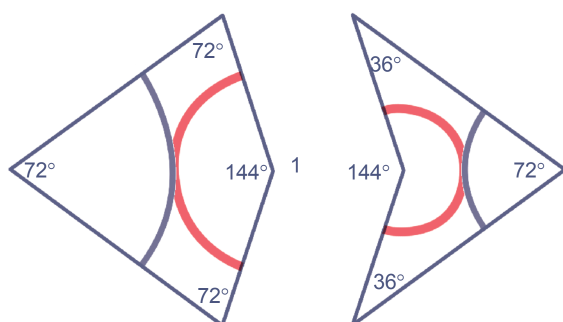
设地面。正方形也是如此（可以周期性或非周期性地铺设地面）。但是，如果我们使用正六边形，那就只能以一种方式铺设，而且它是周期性的，就像蜂窝一样。但是，是否有任何类型的瓷砖（或瓷砖组）只允许以非周期方式铺设？

在 20 世纪下半叶，非周期性马赛克引起了一些数学家的注意，特别是自 1960 年以来，美籍华裔数学家王浩想知道，是否存在一组不同的非周期性瓷砖，也就是说，我们由此铺出来的平面是否必然是非周期性的。顺便说一句，王浩将这个问题与数学和理论计算机科学的基本定理之一——哥德尔不完备定理联系了起来。王浩猜想并不存在这样一组非周期性瓷砖（也就是说，他相信任何可以铺满平面的瓷砖都可以周期性铺设）。但不是这样的。

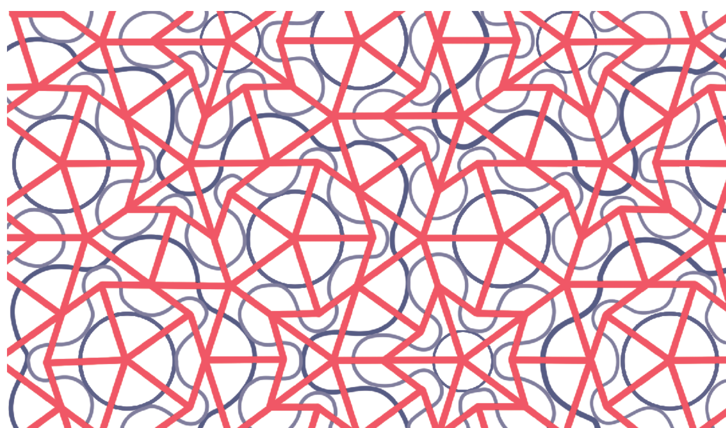
几年后，他的一个学生（后来成了一位杰出的图论研究者）罗伯特·伯杰证明了，存在非周期性瓷砖，并且给出了一套 20 426 块不同的瓷砖，可以平铺整个平面，但所有使用这种瓷砖的铺设方法都必然是非周期性的。伯杰给出的例子引发了某种竞赛，因为 20 426 块砖实在太多了……伯杰亲自设法缩小了这个集合，直到他找到了一套 104 块非周期性的瓷砖。这好多了，不是吗？还能再改进吗？是的，能。1968 年，高德纳将这个数字降低至 92 块。更好的是，1971 年，拉斐尔·罗宾逊给出了一套仅有 56 块的非周期性瓷砖。在某种意义上，所有上述例子都是相似的，都是在方形瓷砖的基础上进行修改。



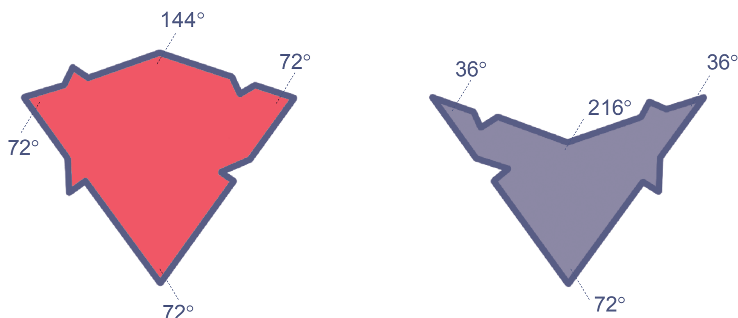
太好了，不是吗？毫无疑问，但不要离开，还没结束。罗杰·彭罗斯还没出场呢。当这位朋友在 1974 年开始研究时，他受到（仅仅）400 年前开普勒的一些作品的启发，找到了另一套 6 个非周期性瓷砖，但它基于五边形。好，6 块已经做到了。但两年后，他获得了（当时的）世界纪录——一套只有 2 块的非周期性瓷砖，“飞镖”和“风筝”。你现在可以放声哭了，我也被这些故事感动了。



它们就在那里，如此美丽而简单。当然，使用这两块砖平铺的时候，应该让上面的彩色线连接起来，如下图所示。



如果你用这两种砖并遵守该规则，就能以非周期方式平铺整个平面。而且你知道，它很美。这个彩色线应当连续不断，规则也可以以下列方式绘制“飞镖”和“风筝”来保证：



现在你就可以用这两种砖来铺设地面了，不要留空隙也不要重叠。你看看你的浴室多漂亮。出于这个以及其他原因，人们已经研究并且仍然在研究彭罗斯马赛克。他们发现了许多属性。例如，平铺地面所需的“飞镖”和“风筝”的比例是黄金分割数，而斐波那契序列则在彭罗斯马赛克中随处可见……

我们还会继续谈论彭罗斯和他的瓷砖。现在我让你一个人静静吧，这样你才能开工——当然，如果你想的话。

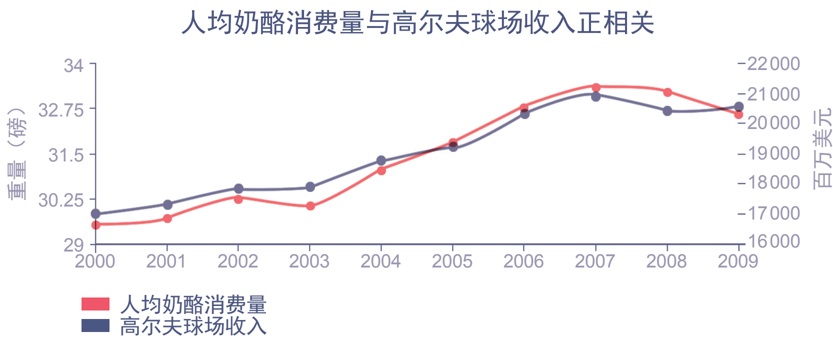
40　相关未必成因果

一个国家的奶酪消费与高尔夫球场的收入之间有什么关系？什么关系也没有，对吗？然而，如果研究美国这两种数据的行为，人们会发现它们似乎是一起变动的。那么由此能得出什么结论呢？什么也没有。



你肯定经常听到“相关未必成因果”的话——如果没有听过的话，那么你刚刚就读到了。相关意味着什么？我们可以从中得知什么？在研究两个数据之间的相关性时，何时可以得出结论？我们将会试着回答这些问题。

正如本章引语中所说，美国的奶酪和高尔夫消费强烈且直接相关，如下图所示：



红线代表 2000 年至 2009 年该国的人均奶酪消费量（以磅计，1 磅 = 454 克），蓝线代表相同时段高尔夫球场的收入（以百万美元计）。我们可以计算出相关系数为 0.989705。这个数代表什么？它告诉我们什么？这个数字是一个量度，当它的值接近 1 时，表示二者正相关：当奶酪消费量增加时，高尔夫球场赚得更多钱。然而，这两者之间显然没有什么关联。奶酪的消费既不会让高尔夫球场产生收入，这项运动也不会刺激乳制品消费。

我们已经说过，相关并不意味着因果。但反过来说：如果某个行为导致了某种结果，则研究数据中会出现相关性。有时会发生一种逻辑错误，称为“肯定后件”：如果 A 意味着 B，则 B 意味着 A，但并不是这样的。一个简单的例子是：如果下雨了，地面会变湿；但如果地面湿了，并不一定是下雨了。我们将用非正式语言介绍一些统计数据来解释它。

比方说你是一位农民，正在考虑要不要为你的作物买新的肥料。假

设你有数不胜数的良田，因此在使用这种肥料之前，你想要确认它是否真的能提高作物的产量。为此，你在一段时间内在一小块土地上使用了这种肥料，并一点一点地增加用量。你在电子表格中定期记录两个数据：作物产量和施肥量。现在我们将图表中的数据表示如下（图 1，这是一个非常简单的虚构例子，以便于解释）。

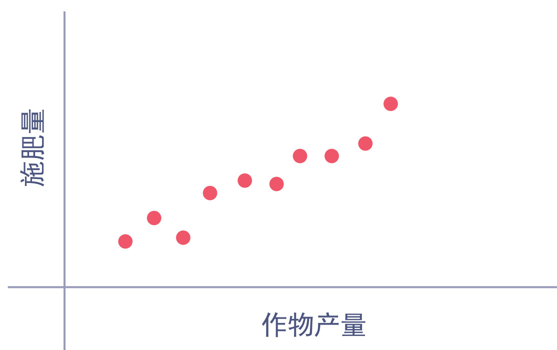


图1

如果我们在图表中看到类似于图 1 的情况，我们可以认为，确实是肥料用量越多，效果越好，对吗？不是的。如果得到这种结果，我们只能知道数据是正相关的（当一个值增大时，另一个也增大，反之亦然），但这并不意味着一个变量是另一个增加或减少的原因。因果意味着相关，而反之却不一定成立。至于说数据相关成立的，是因为红点的分布“靠近”一条直线（图 2）。

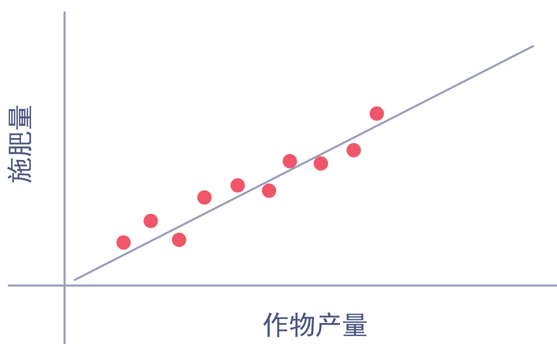


图2

如果出现如图 3 所示的情况，那些点非常分散，并且它们的分布并非“靠近”一条直线，那么除了它们不是线性相关的以外，我们什么也没有了解到，但这里可能存在另一种相关性。我们永远不能推断，因为没有相关性，所以没有因果关系（图 3）。

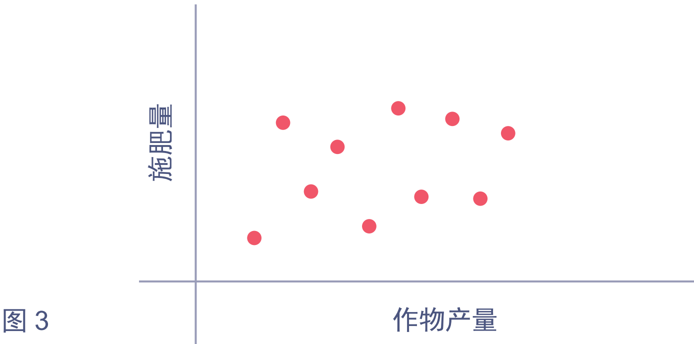


图 3

在原则上，唯一可以让卖化肥的商人走人的情况是，你的数据得到了图 4。

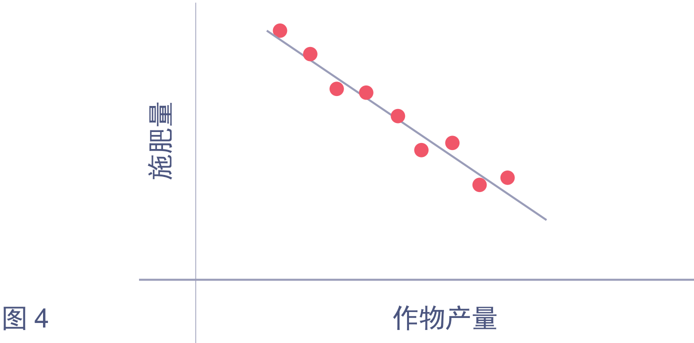
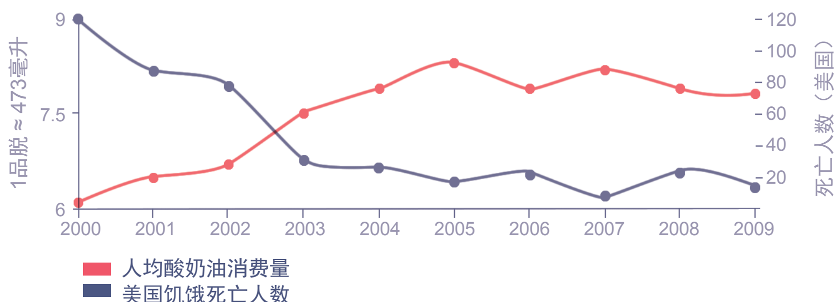


图 4

在这种情况下，两者为负相关。这貌似意味着，肥料会对作物产生负面影响。为什么呢？因为我们得到的不是正相关，而是负相关，我们可以把责任推到肥料上，说肥料不好。

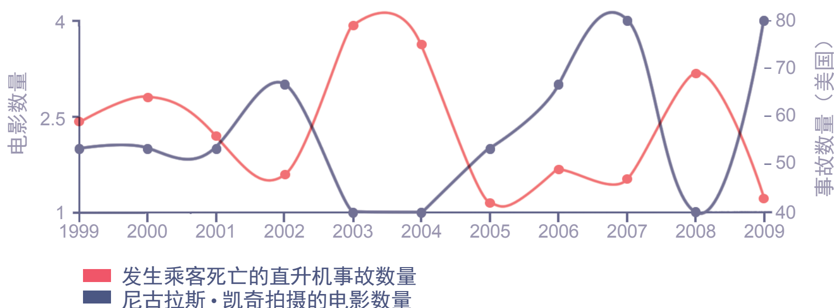
回到奶酪和高尔夫球，你可以查看很多其他有意思的数据，它们虽然相关，却没有任何关系。人均奶酪消费量与高尔夫球场收入呈正相关（人们吃的奶酪越多，高尔夫球场的收入越高），而酸奶油消费与饥饿死亡率呈负相关（酸奶油消费越多，饥饿死亡越少）。

人均酸奶油消费量与美国饥饿死亡人数负相关



另一张图表显示了尼古拉斯·凯奇拍摄的电影数量与发生乘客死亡的直升机事故数量之间呈负相关。

尼古拉斯·凯奇拍摄的电影数量与发生乘客死亡的直升机事故数量负相关



好吧，好吧，我下面要说的和统计无关了，但下一次如果航班上放凯奇的电影，我就得准备个降落伞。而且用我大儿子的话说，我坐飞机的时候就不那么讲科学了。

41　地铁线路图的拓扑逻辑

你常坐地铁吗？你有没有注意到线路图的设计？这让你想起什么？对，电路。这很正常：今天的地铁线路图是由一位电气工程师设计的，而且这堆彩色线条背后隐藏着很多数学知识。

有些数学家常常会对工程师开些善意的玩笑，好吧，对物理学家、化学家、生物学家……也是如此。我们就是这个样子，但没有恶意。然而，我们应当意识到，工程师取得了无数的成就。我对其中一个成就特别好奇：伦敦地铁线路图是由一位默默无闻的英国工程师哈里·贝克设计的，他彻底改变了 20 世纪的一些设计理念。

实际上，第一张伦敦地铁的路线图是地理地图，也就是说，人们在城市的真实地图上，以近似实际的距离画出各条地铁的真实线路，把站点也标在图中。



1930年以前的伦敦地铁线路图

但是，请你想一下（贝克在 1931 年左右就思考了这个问题），地铁乘客无须知道地铁从一个车站到另一个车站的路线，只需知道车站的相对位置（所处的顺序），以及可以换乘的车站。用更正式一点的语言来说，乘客需要的是地铁的拓扑图。因此，无论线路的实际走向如何，都可以使用很少的转向来绘制线路图，并且这对乘客来说更清楚、更容易使用：无须显示从城市的一部分到另一部分的曲线路径。

从数学的角度来看，我们知道，地铁线路图是一个图（我们已经多次讲过图了），其中车站是顶点，而不同车站之间的线路是边。图中仅显示顶点之间的关系（如有）。在关于如何组织婚礼宴会的研究中，图的两个顶点（在这个例子中是婚礼的宾客）之间的关系（以及因此存在的边）显示了不相容的情况，帮助我们找到安排桌子的最好方式。对地铁而言，如果有地铁线路将我们从一个车站带到另一个车站，则两个顶点（车站）将（用边）连接起来。

所以应该这样来画伦敦地铁的线路图——画成一张图，而且要尽可能清楚。但具体怎么画呢？因为同一张图有很多种不同的绘制形式，而且根据我们想要做的事情，有些画法比其他画法更好。事实上，有一个研究领域专门致力于优化图形绘制，处理大量应用中非常复杂的问题。举一个简单的例子吧，让我们看看本页及下页中的插图，其中出现了四张图：图 1、图 2、图 3、图 4。

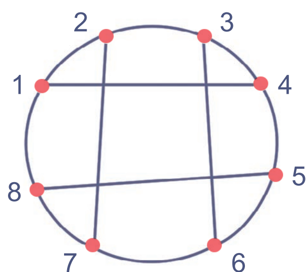


图 1

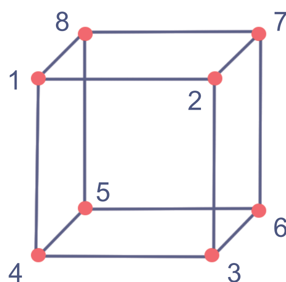


图 2

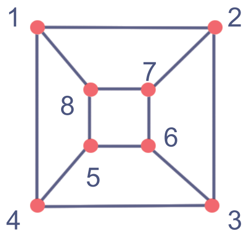


图 3

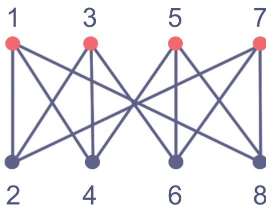
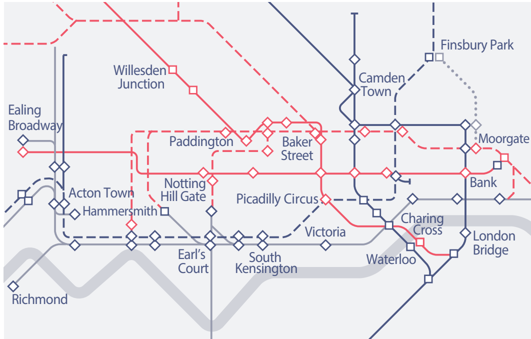


图 4

在图中，我们可以说图 1 是哈密顿图，也就是说，有一条路径穿过所有顶点并返回起点，而不会通过同一顶点两次（有助于设计邮递员或者垃圾车的路线，见第 38 章）。图 2 则是一张正则图，也就是说，所有顶点都连有相同数量的边。如果我们看看图 3，我们就知道它是一张平面图，也就是说，它的边没有任何交叉（在电路设计中，这个属性非常重要）。最后，我们可以从图 4 推断出，你可以仅用两种颜色为顶点着色。（这一点非常适合上文中提到的婚礼的例子，因为如果婚礼上只安排两张桌子，这个方法可以帮你省去大麻烦。）

啊哈，你注意到了，对吗？是的，这四张图实际上是同一张图，以不同的方式绘制，并且根据选择的不同画法，一些属性比其他属性更突出。我希望你已经相信了根据用途来绘制图形的重要性。让我们回到伦敦地铁线路图上吧。



哈里·贝克当时（1931 年）发现，线路图不应该是一张地理图，拓扑图更有用，其线条中的曲线和转弯更少。他开玩笑似地根据电路图带来的灵感制作了第一张图。地铁公司的负责人有些迟疑地将贝克的想法展示给了乘客，却深受乘客欢迎。

在第一张图大获成功之后，贝克又逐步改进视觉效果来让它变得更好。比如在 1936 年，他去掉了曲线，只保留 45 度和 90 度转弯。

显然，地铁公司还想要更多东西，并在 1940 年要求贝克引入 60 度的角度，但这个想法后来被他拒绝了，因为这会涉及很多其他问题。

你可以查看伦敦地铁线路图直到现在的演变史，看看之后出现的哪些改变让它变得更易用。毋庸置疑，哈里·贝克是地铁线路图的创造者。如果算上这个设计带来的衍生商品（T 恤衫、杯子……），它必定是 20 世纪最赚钱的产品之一。

42 地球能装下所有人吗？

今天地球上约有 75 亿人。预计到 2050 年将达到 100 亿人。节育是目前全世界最重要的问题之一，因为出现了这样一个问题：地球上会不会住不下这么多人呢？



我们在另一篇文章（见第 9 章）中讨论了指数增长，并试图证明了所有指数增长的东西都会或多或少变得无法控制。今天我们会看到，指数增长发生之频繁超出了我们的想象，并说明它带来的危险。

国际象棋诞生的传说很好地说明了指数增长的想法：一位智者为国王发明了国际象棋，出于感激和兴奋，国王愿意为这个给他带来许多快乐的东西及其发明人慷慨解囊。但智者只要求第一个格子里放 1 粒米，在第二个格子里放 2 粒米，接下来放 4 粒米……

这个 1, 2, 4, 8, …就是所谓的指数增长：每个格子里的米都比前一个格子增加 1 倍。问题在于，第 64 个格子里要放置 2^{63} 粒大米，这大约是 2018 年世界稻米产量的 400 倍，超过人类历史上稻米的总产量。或者，如果我们更形象一点：把这么多个 1 欧元硬币堆积起来，高度会超过 4 光年，超出太阳系并几乎到达下一个星系。真是难以置信。

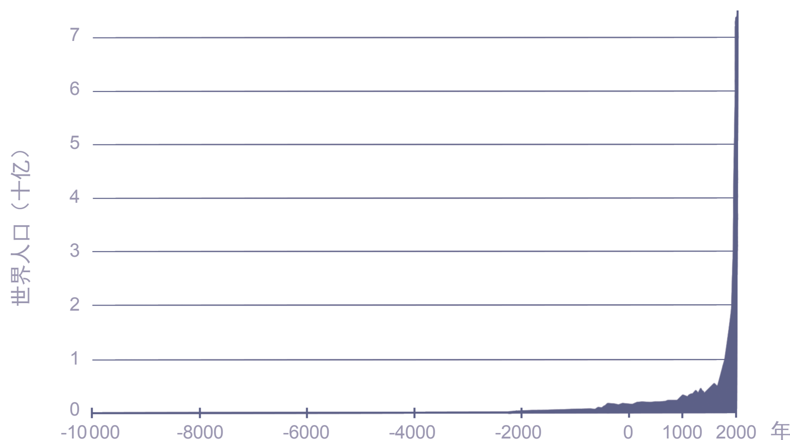
但是，有些人可能觉得这用不着担心，因为我们不会去数 2 的 63 次方粒大米，而且，如果我们有这么多欧元硬币，我们也不会把它们堆成一个小塔。有些人可能会认为，在日常生活中，指数增长非常罕见。是的，确实，持续的指数增长在本质上必然是非常罕见的，因为这个性质本身就确保它无法发生。尽管如此，在某一阶段，指数增长是很常见的。

为什么指数增长这么常见呢？这仅仅是因为，任何固定和恒定百分比的增长都是指数增长，而这总是不可持续的。政治家和经济学家应该意识到这一点：长期稳定而持续的增长，例如国内生产总值增长，是绝对不可能实现的。在很长一段时间里，中国的国内生产总值都每年增长 7% 以上，这意味着中国的经济总量每 10 年就会翻一番。而显然，在 100 年后，地球上就没有足够的资源来维持这样的增长了。

但是，无须增长 7%，你就可以获得指数增长率：无论我们选择什么百分比，都有类似的增长速度，只是不是每 10 年翻一番罢了，可能会多一点，也可能会少一点。让我们随便想一个小幅增长的例子吧。比如，假设地球上的人口每年增长 1.7%（实际上还要高一点：自 1950 年

以来，世界人口增长率已经接近 1.8%），这意味着世界人口会在短短 41 年内翻一番。要近似求出翻一番所需的时间，只要用 70（不是刚好 70，但这是个很好的近似值）除以相应的百分比。

如果现在地球有 70 多亿人，40 年后将有 140 亿人，80 年后有 280 亿人，而在 5 个世纪之后，人类的质量将等于整个地球的质量。但是这个质量必定来自某处，而且一个行星似乎无法承受这样大的质量。有人可能会认为，那时人类将开发出足够的技术来移民其他星球。这虽然有可能实现，但得需要大量这样的行星，因为，如果我们说地球没有足够的资源来维持 120 年的增长，那么我们也不能仅限于在几个行星上移民，因为人口的指数增长会在几年内让这些行星饱和。



有人会说，马尔萨斯已经在 18 世纪末用过了这些论点，而他的预言尚未实现。但是，马尔萨斯的研究只限于食物，而我们在这里说的是人类总质量引起的问题。正如美国环境记者艾伦·韦斯曼指出的那样：“每隔 4 天半，世界上就要多出 100 多万人。这是不可持续的。”是的，完全不行。

显然，我们无法保证在几个世纪内获得足够的技术来移民成千上万个行星，因此我们必须采取措施来限制人口增长。

43　足球：数学比章鱼保罗更准确

还记得 2010 年世界杯足球赛吗？著名的章鱼保罗成功预测了比赛结果。既然它已经不在了（愿它安息），迷信的人就得在自然界奇怪的现象中寻找各种征兆……如果你不想用这类方法，我建议你研究一下图论来预测结果。



在2018年、2022年都会举办世界杯……但是请记住2014年的世界杯。在比赛前夕，西班牙球员们面临着“卫冕”这个几乎不可能的任务。因此，任何能帮助伊涅斯塔、哈维、阿隆索和他们的球队的建议都是好的。除了健康饮食、适当休息和刻苦训练之外，一个数学分支也可以帮上忙——图论。我们已经说过了，不开玩笑。有几篇文章尝试根据每个球队在比赛中传球的图（顶点是球员，并根据传球次数在他们之间添加粗细不同的箭头）来研究其战术、优势和弱点。2010年世界杯期间，英国伦敦玛丽女王大学的两位数学家哈维尔·洛佩兹·培尼亚和雨果·图谢特在该研究领域尤为出名。①

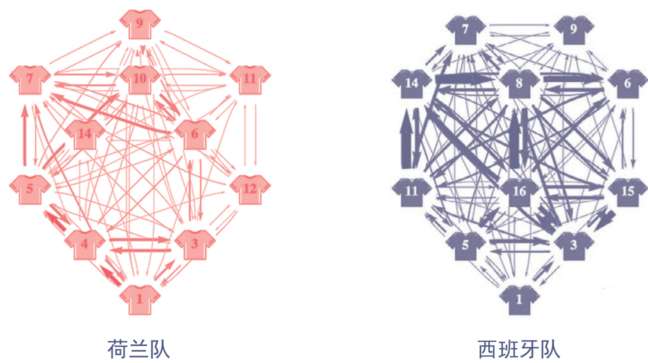
在研究中，他们收集了比赛的不同阶段的所有的传球数据，并预测西班牙会胜利。他们还分析了一些特定的比赛，例如，一些比赛突出了英格兰对德国战术的巨大漏洞。对于每场比赛，洛佩兹·培尼亚和图谢特在世界杯期间为球员之间建立了一个“传球网络”，并分析了如何比较不同球队之间的网络。图谢特解释说：“网络中的每一位球员都被分配了一个叫作‘中心性’的分数，来衡量他对于网络有多重要。中心性的得分越高，如果该球员因某种原因发挥失常，其影响就越大。这种类型的分析通常用于获得最强健的计算机网络，但也可用于规划足球战术。”

研究者如何计算球员的中心性呢？根据若干参数，主要有三个中心性：接近中心性（closeness）、中介中心性（betweenness）和人气中心性（PageRank）。每位球员的接近中心性是基于他与团队其他成员的平均距离而分配的值，因此与团队联系紧密的球员具有较小的平均距离和较高的接近中心性。在某种意义上，中介中心性指的是球员在比赛中连接其他两位队友的行为的重要性，换句话说，就是把他撤下对比赛造成的影响。这样看来，球队应当尝试在球员间均衡地分配这个值，以避免

① Javier lòpez Peña, Hugo Touchette, *A network theory analysis of football strategies*, 2012.6.28.

过度依赖某些明星球员的风险。关于人气，值得注意的是，这种中心性概念与谷歌用于索引互联网的 PageRank 算法（分析链接的数量来为网页排序的算法）一致，比如根据连接到它的页面数量赋予某些页面更多“权重”。在足球中，人气测量的就是另一位球员决定传球给你而不是继续自己带球的概率。显然，一位球员的人气参数值取决于他在队友心目中受欢迎的程度，因此必须整体计算。

除了测量每位球员表现出的这三个参数之外，他们还提出计算球队的聚集度（clustering）值，衡量球队中的球员聚集在一起并相互传球的倾向。计算好这些数据后，研究者是如何在没有任何“章鱼”的帮助下，在赛前利用这些数据预测出荷兰对西班牙的比赛结果的呢？



决赛前荷兰队和西班牙队的传球网络，使用半决赛传球数据和战术编排计算

研究的传球网络显示，西班牙球员在本次赛事中传球数量惊人（不过，任何业余球迷都知道这一点），比德国多出近 40%，比荷兰高 2 倍。

西班牙球员的得分（最高的两个得分加粗显示）

球　员	C_i	$C_B(i)$	x_i	C_i^w
卡西利亚斯	16.52	0.00	3.29	20.46
皮克	17.32	**3.92**	11.46	30.70
普约尔	16.32	2.86	7.92	27.12
伊涅斯塔	14.60	0.50	8.54	31.03
比利亚	8.68	0.50	5.89	23.96
哈维	**18.28**	1.19	**14.66**	**46.47**
卡普德维拉	16.54	**6.12**	10.56	29.91
阿隆索	17.11	1.19	12.31	**41.69**
拉莫斯	16.45	2.41	9.02	27.05
布斯克茨	**18.55**	2.41	**12.99**	35.32
佩德罗	3.42	0.00	3.35	16.75

C_i = 接近中心度，$C_B(i)$ = 中介中心度，x_i = 人气中心度，C_i^w = 聚集度

“团队力量的基础是快速传球，并在所有球员，尤其是那些打中场的球员之间很好地分配。”哈维尔·洛佩兹·培尼亚说道。但不仅如此，平衡还体现在世界杯最佳射手大卫·比利亚得到的传球中，他平均每场比赛接到传球 37 次，比其他球队的任何前锋都多。

荷兰球员的得分（最高的两个得分加粗显示）

球　员	C_i	$C_B(i)$	x_i	C_i^w
斯特克伦博赫	**16.34**	0.32	7.63	28.35
范德维尔	14.43	**2.97**	9.79	31.39
海廷加	16.23	2.67	**11.06**	31.34
马泰森	**17.30**	1.30	10.84	33.22
范布隆克霍斯特	15.74	1.12	10.07	**37.00**
范博梅尔	12.46	**3.08**	**11.19**	32.36
库伊特	7.97	1.67	9.02	27.06
德容	10.95	2.73	9.28	28.36
范佩西	6.89	2.92	5.88	20.13
斯内德	10.91	2.17	10.32	**33.77**
罗本	5.91	0.16	4.91	23.91

C_i = 接近中心度，$C_B(i)$ = 中介中心度，x_i = 人气中心度，C_i^w = 聚集度

相反，荷兰的比赛风格显然攻击性更强，球员间的传球次数非常少，其中大多数球是传给前锋的。洛佩兹·培尼亚称："传球次数低表明荷兰队更喜欢快速进攻、反击，而不是细腻的打法。他们通常利用直接任意球这样的关键球进球，并利用身体素质击败对手。"

根据这些数据，他们得出结论，西班牙更容易击败荷兰的打法，所以胜利应当属于西班牙。他们在 2010 年 7 月 2 日（决赛前几天）公布了这些结果。

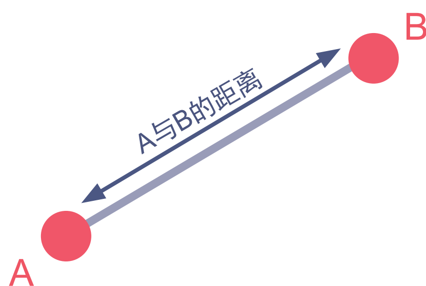
所以我们已经看到，西班牙队既可以依赖图论，也可以依赖章鱼保罗：他们不会输。

44 飞机飞直线吗？

2014 年，我们都以沉痛的心情听到了马来西亚航空公司 MH370 飞机失踪的悲剧。有人在地图上展示了飞机可能遵循的路线。但你知道航空公司如何选择最短路线吗？在这个例子里，吉隆坡和北京之间的最短路线又是什么呢？

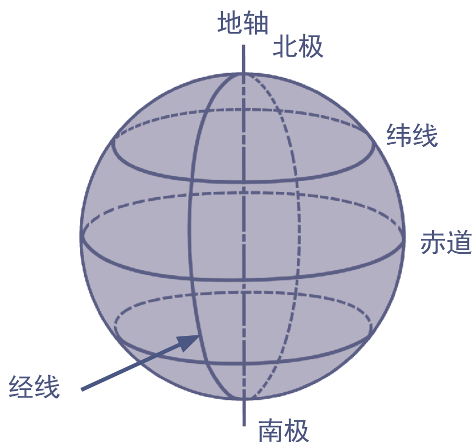
在失踪多年后，MH370 航班到底发生了什么仍然是一个谜。大众的想象力从来没有停止猜测失踪的原因……

抛开各种离奇的想法，搜索失事航班给了我们一个机会，用更简单明了的数学来思考一下飞机是按照什么路线飞行的。它可能并不完全符合人们的想象。比如，你觉得从马来西亚吉隆坡飞往北京的最短路线是什么样的？有人可能会拿出世界地图和一把尺子，画出连接两个城市的直线，因为我们从欧几里得那里知道了两点之间直线最短。确实如此，但是，只有当我们在一个平面中移动并用欧几里得距离测量，也就是测量连接平面中两个点的线段长度时才是这样。



然而，现在我们可以肯定地球不是一个平面，而是一个球体——好吧，它不是一个规则球体，但也差不多。所以我觉得应该学习一下如何计算球面上两点之间的最短距离。

球体上两点之间最短的线是测地线。如果用通过这两个选定点和球心的平面来切割球体，在球面上绘制出的曲线就是测地线。也就是说，测地线是球面上的一条弧线，位于以球心为圆心的大圆上。比如在地球上，经线（用来测量经度）是测地线，因为它们都是以球心为圆心的圆圈；而纬线（用以测量纬度）则不是，因为（除赤道外）它们的圆心都不是球心。



在地球上两点之间选择纬线而非测地线（这是最短的）作为路线，曾给西班牙的航海历史带来了深远的影响。

以前，只需测量太阳的高度或观察地平线上的一些恒星，就很容易知道我们离赤道有多远（纬度），但要确定地球上的确切位置，我们还需要知道另一个坐标，通常是经度。确定经度的问题直到 18 世纪才得到解决（这要感谢英国人约翰·哈里森发明了比当时已有的时钟更精确的时钟）。因此，如果一位探险家进入一片未知的海洋，比如 1492 年的哥伦布，他通常不会依照最短航线——测地线（因为要在球面上确定它，必须知道起点和终点），而是沿着纬线航行。

这一点，加上洋流，以及葡萄牙对哥伦布失去兴趣的窘境，反倒促成了哥伦布首次航行大获成功。没错，因为在那个时代，探险几乎是葡萄牙王室的专利，而葡萄牙人也已经进行了多次探险。这些探险遇到了什么问题？他们为什么没有先于哥伦布到达美洲？因为葡萄牙人想要沿着纬线向西航行，并且从对于他们来说最为合理的地方，即位于葡萄牙王国领土最西部的亚速尔群岛出发，结果他们遇上了非常强的洋流——墨西哥湾暖流以及随之而来的风。这使得航行非常困难，他们几乎不可能前进。

幸运的是，哥伦布的航海计划没有被葡萄牙人接受，他被迫向西班牙卡斯蒂利亚王室求助。后者同意了资助他的航行，并要求他从卡斯蒂利亚的港口出发：因此，哥伦布途经的最后一块土地是加那利群岛（戈梅拉岛和大加那利岛）。从加那利群岛出发后，洋流和风向均向西，让他们的航行成为可能。事实上，在返程航行中，哥伦布选择的航线要偏北很多，因此，墨西哥湾暖流推动他回到了欧洲。

不过，现在让我们把西班牙与葡萄牙古老的竞争搁在一边，回到从吉隆坡到北京的最短飞行路线问题上。有人可能会想，航线应该是对应于地图上连接起点和终点的一条直线。或许像哥伦布一样，沿着吉隆坡所在的纬线向东飞行，到达北京的经度后再向北飞行。

但是，我们说过情况并非如此，因为除了一些限制之外，飞机通常遵循连接起点机场和终点机场的测地线。对于吉隆坡－北京航线，测地线与直线非常相似，但它并不是直线。

显然，航线越长、纬度差异越大，由测地线标记的路线和直线之间的差异就越明显。比如，从西班牙塞维利亚到吉隆坡之间的测地线的弧度就更大。

在实际飞行中，飞机并不完全沿着测地线飞行。因为在测地线上可能会遇到因地理和（或）气象问题，甚至有关空中交通限制的国际规定

而无法飞行的区域。

如果你有兴趣的话，你可以研究一下飞机航路，在头脑中想象飞行来自娱自乐。因为事情照这样发展下去，我们很快就不能随便乱飞了……

就个人而言，当我在 1998 年 1 月乘坐马来西亚航空公司的飞机飞往吉隆坡时，我注意到的唯一一件事就是，整个机组的态度比大多数欧洲航空公司友好，环境也舒服得多。

后记

既然我们已经谈到了经度和纬度，我给你提一个古老的谜题，以防有人不知道。一位探险家在清晨从他的帐篷出发，先向南走 10 千米，再向东走 10 千米，最后向北走 10 千米，发现自己回到了起点。他在他的帐篷里看到一只熊。这只熊是什么颜色的？

45　蚂蚁能教给我们什么算法



春天来临时，和好天气一起来临的有阳光、花粉过敏……还有蚂蚁！那些侵入我们厨房的小生物也是一种相当高效的计算机算法的灵感来源。

不，这不是我瞎编的：计算机模仿蚁群行为，试图解决无法用经典数学方法处理的问题，比如旅行商问题（参见第 6 章）。这并不是计算机第一次模仿自然来解决问题，比如还有基于达尔文进化过程的遗传算法，通过该过程，自然可以获得适应环境的物种。

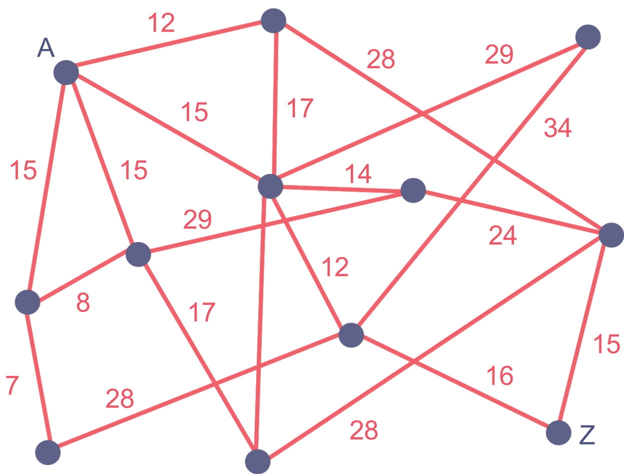
还是说回蚂蚁吧。我们能学到什么呢？我们可以学到很多关于集体智慧的东西：蚂蚁很灵活，因为它们会适应内部或外部的干扰；它们很强大，因为虽然蚁群中的一些个体死亡了，但它们仍然能完成任务；它们是分散的，因为蚁群不需要任何领导者来执行任务；而且，它们会自己组织起来，哪怕没有预先定义接近目标的路径，蚁群还是会找到目标。





这一切都遵循简单的规则和更为简单的沟通（如果可能的话）。很让人羡慕，对吧？但我们谈论的是数学。

数学模型如何模仿蚁群呢？比如，让我们考虑一下在图中找到最短路径的问题。在我们的图中，顶点（点）代表城市，边（线）代表连接它们的道路，我们在上面标记了长度。如果想要计算从顶点 A 到顶点 Z 的最短路径，该怎么做？显然，人们可以用确定性的方式完成（实际上，人们并不会在这个问题上使用蚁群算法，但我们用它作为一个例子），而且还可以尝试模仿这些昆虫找到食物和蚁穴之间最短路径的方法。



在观察一队将食物运到蚁穴的蚂蚁时，你应该会知道它们跟随信息素的踪迹——它们能够闻到之前的蚂蚁在路径上留下的类似于激素的化学物质。如果我们在其路径中间放置障碍物，信息素的痕迹就会被打乱。

在那一刻，蚂蚁会随机决定应该依照哪条替代路径。有些蚂蚁会选择最短的路线来避开障碍，有些则不会（就是我们经常看到的那些张皇失措的蚂蚁）。应该注意，蚂蚁在蚁穴外面分泌的信息素的量或多或少是固定的。因此，选择最短路径的蚂蚁在路径上分泌的信息素浓度最高，因为它们留在蚁穴外的时间较短。通过这种方式，“聪明”的蚂蚁留下的痕迹更强烈，将鼓励后续的蚂蚁选择最短的最优路径。那些追随“聪明”蚂蚁的蚂蚁会用信息素让这条痕迹愈发强烈，所以在很短的时间内，所有蚂蚁都会通过最短的路线返回蚁穴。

这些都可以通过计算机轻松模拟，而且人们设计出了蚁群算法（Ant Colony Optimization，简称 ACO）。我不会在这里详细解释蚁群算法的工作原理，但其主要思路如下：如果我们有一个图，并想要计算两

个顶点之间的最短路径，我们就从第一个顶点“放出”一只蚂蚁。当然，它会选择一条边移动到图的另一个顶点，当然该顶点要与第一个顶点之间有连线。为此，我们将为每条边规定一个初始量并分配信息素，通过这种方式为每条边赋予一个概率，与信息素的量成正比，与边的长度成反比。

根据这个指定的概率，蚂蚁会选择路径的第一条边。当它到达一个新的顶点（代表一个可能的障碍物前的分叉点，或道路的交叉点）时，蚂蚁很有可能继续沿着具有最强信息素痕迹的边往前走（我们为具有更多信息素的边分配更大的概率，然后抽签）。当蚂蚁到达目标顶点时，我们在其走过的边上分配固定量的信息素（路径越长，每条边上的信息素越少）。然后，我们放出另一只蚂蚁，以此类推。经过几次迭代后，蚁群将找到图中的最短路径。

这差不多就是蚁群算法的内在思路了。因此，下次当我们的朋友入侵你的糖罐时，请记住，至少它为计算机世界贡献了一些东西，况且我们每天都在容忍其他更有害的虫子……

顺便说一下，在执行这些算法期间，我们保证没有任何蚂蚁遭受任何伤害。

46　谷歌和线性代数

如果有一天搜索引擎突然不能用了会怎么样？单是想一想就该冒冷汗了……

很多人都不得不承认，这个著名的搜索引擎为人们的工作和个人生活带来了真正的革命。它带给我们的影响甚至比你想象的还要大。多亏了搜索结果，我们才能找到某家餐馆或酒店，选择某部电影或聆听某首音乐。但有多少人知道，这个平台的成功全靠其创始人善于运用数学工具？

也许，当初在美国密歇根大学学习线性代数、图论和概率以及其他学问时，谷歌的两位创始人之一拉里·佩奇并不知道他会用在课堂上学到的东西搞出什么动静。另一位创始人谢尔盖·布林还在距离佩奇超过 800 千米的地方学习数学，也许他也对将来一无所知。但是他们做到了，而且做得多么漂亮！

撰写本书的几个月前，一位同事告诉我，我们计算机系的一位校友

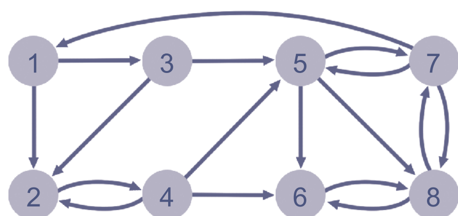


抱怨，在当了几年程序员之后，他仍然不知道为什么在大学非得学线性代数。我的同事回答得很漂亮：“显然，谷歌的创始人就知道原因，所以现在你在敲代码，人家在数钱。”我觉得这场对话到这里应该就结束了——我的同事非常有说服力。

确实。如今，所有人都很自然地在谷歌上输入几个单词，然后就找到了无限的结果。我们已经习惯了无须翻过第一页，因为我们在最前面的几个条目中就能找到结果。但是，如果有人住在西班牙韦尔瓦省著名的埃尔罗西奥，却仍然没有工作，他在谷歌里输入“trabajo Rocío”（意为“工作 埃尔罗西奥”），第一个条目就是埃尔罗西奥的工作机会，甚至还会找到西班牙劳工部长的声明。然而，智利当代著名诗人聂鲁达的诗作《致我的责任》（*A mis obligaciones*）中也有“rocío”（意为“露

水”）一词，却很难被找到。显然，谷歌明白搜索“trabajo Rocío”的人更可能是一个想要摆脱失业的人，而不是个诗歌迷。它是对的，但它是怎么做到的呢？

谷歌做的第一件事，就是索引所有互联网页面（有时甚至一天几次），并用它构建一个有向图。这个图中的元素，一部分是全世界的网页（它们是图的顶点），另一部分则是这些网页之间的链接（如果一个页面连接到另一个页面上，那么就有一个从第一个页面指向第二个页面的箭头）。



有了这些信息，谷歌为互联网的每个页面分配一个号码，即所谓的PageRank（不完全是这样，但与之类似）。页面的 PageRank 试图测量上网的人最终访问这个特定页面的概率。过去，人们会用海滩上常用的语言打个比方，说它试图测量偶然的“冲浪者”在“导航”时到达该页面的概率。

很明显，如果有许多其他页面都连接到某个页面，那么它的PageRank 应该很高。因为我们知道，如果很多人都想要找它，那么它肯定有一些有用的信息，而人们也非常可能最终会访问它。但这还不是全部：同样明显的是，如果你的网页连接的网站很少，但这些网站在网络中非常有影响力，那么你的网页的 PageRank 也应该很高，因此它会出现在谷歌提供的头几个结果中。

有了这两个想法（以及与概率过程更为相关的其他想法），PageRank 算法就被构造出来了。为了表示页面和链接的图景，在这里使用了数学中所谓的“矩阵”。

$$\begin{vmatrix}
0.0250 & 0.0250 & 0.0250 & 0.875 & 0.0250 & 0.875 \\
0.875 & 0.0250 & 0.0250 & 0.0250 & 0.0250 & 0.0250 \\
0.0250 & 0.450 & 0.0250 & 0.0250 & 0.0250 & 0.0250 \\
0.0250 & 0.450 & 0.308 & 0.0250 & 0.0250 & 0.0250 \\
0.0250 & 0.0250 & 0.308 & 0.0250 & 0.0250 & 0.0250 \\
0.0250 & 0.0250 & 0.308 & 0.0250 & 0.875 & 0.0250
\end{vmatrix}$$

基本上，对该矩阵执行代数运算，为每个页面分配一个数字，可以让该页面在谷歌显示的排序中排到一个好位置……或者不好的位置。如果你想详细了解作者提出的算法，可以看篇论文[①]。如果你想玩一玩，网上有一个 PageRank 计算器来进行测试，由此更好地理解该算法。

我想最后向我的程序员学生们说几句话。你们永远不会知道成功的秘诀会隐藏在什么样的数学里。如果你们能像拉里和谢尔盖一样登上福布斯富豪榜，不要忘了你们的老师我啊！好吧，不管你们的未来怎么样，我都希望你们能记住我。

① Sergey Brin, Lawrence Page, *The Anatomy of a Large-Scale Hypertexual Web Research Engine*, Stanford University.

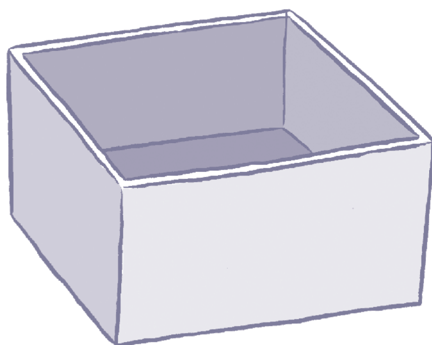
47　大米、清酒和木头盒子

今天我们去日本转一圈吧。我提出一个挑战：只需一个盒子即可准确测量液体。要不要玩？

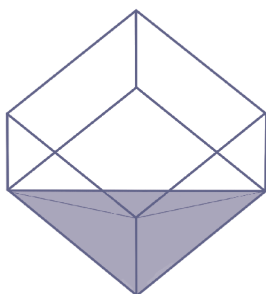
我最喜欢的数学普及者是位日本人，他叫秋山仁，我很幸运成为他的朋友。在他告诉我的所有事情中，最令人惊讶的事之一是我今天要讲的这个——用一个没有任何刻度的木盒子来进行精确的测量。

我们所说的木盒子叫作“枡”。它是方形的，没有盖子，传统上日本用它来估量大米。今天人们用小“枡”来装清酒，或用它装盐、胡椒或香料，以便放在桌上。

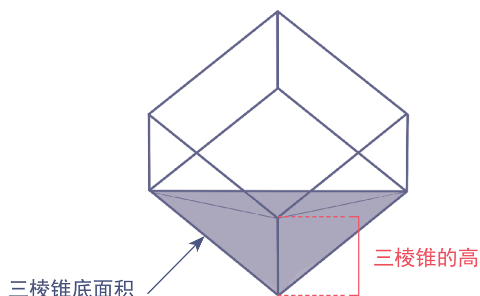
挑战开始。假设我们有一个 6 升的“枡”，比如说，我们用它卖水，但顾客（他们会用一样的“枡”来买水）让我们装个整数，即 1、2、3、4、5 或 6 升，而不会要求 1.5 升。此外，我们用“枡”从大水缸中取水，但我们只能从水缸中取一次水。然而，我们可以根据需要把水倒回水缸中。好啦，我们准备好了。



如果第一位顾客要买 1 升水，该怎么办？请记住，“枡”上没有刻度。实际上，如果我们在水箱中把“枡”装满，然后开始倒水，直到它与底边的两个顶点对齐，剩下的水就是 1 升。就像下页中的图一样。



为了验证上一段所说的内容是否正确，只需想一下如何计算四面体和平行六面体的体积，算一下就知道了：



$$三棱锥底面积 = \frac{“枡”的底面积}{2}$$

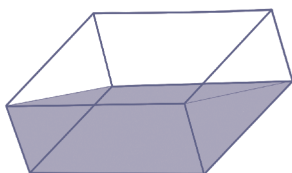
三棱锥的高 = “枡”的高

$$三棱锥体积 = \frac{1}{3}\left(\frac{“枡”的底面积}{2} \times “枡”的高\right)$$

$$三棱锥体积 = \frac{1}{6} \times “枡”的体积 = 1升$$

如果顾客想要 2 升水呢？有人可能想重复两次上面的方法。但是，

错！不可能。因为，为此我们就得从水缸中取两次水，而我们只能取一次。那怎么办呢？让我们看看如何用“枡”取 3 升水，并在取到之后减少到 2 升。要用我们的盒子量 3 升水，只需先把它装满，然后倾斜将水倒出，直到水与盒底的一条边对齐，如下图所示。



这将是“枡”的一半，因此水是 3 升。好吧，我们现在可以用它来量出 2 升水了：把“枡”装满是 6 升水，把 3 升水倒回水缸，让水面与底边对齐，于是“枡”里还有 3 升水。现在把水倒进顾客的“枡”里，直到我们自己的“枡”里还剩 1 升水，与顶点对齐。现在我们把 2 升水倒给顾客，剩下的 1 升水倒回水缸。

要是 4 升水呢？容易。像前面一样取 6 升水，给顾客的“枡”里倒 3 升水，直到与底边对齐。现在把自己“枡”里的水倒回水缸，直到只留下 1 升水，与顶点对齐，然后我们把水倒给顾客。这样一来，卖 5 升水也非常容易：只要把我们的“枡”装满，倒进顾客的“枡”里，直到我们的“枡”里只有 1 升水就行了。

好，轮到你玩了。我提出一个挑战来“招待”你一下，没有盒子，这次用罐子：你有 3 个容量分别为 3、5、8 升的大罐子。8 升的水罐装满了水。你的任务是精确地量出 4 升水。你没有其他容器，这些容器上也没有刻度。我等你的答案咯！

如果你想做一个纸制的“枡”，可以在网络上学习。你永远不知道什么时候你需要它，哪怕不需要，它也可以让你娱乐一下。

48　晴天、下雨以及电梯的故事

和陌生人一起等电梯时，人们会看着地面，或谈论今天下雨或晴天。但你有没有注意过电梯有多少次从上面下来，又有多少次从下面上来？你注意到什么奇怪的事了吗？



如果西班牙有什么事值得大导演路易斯·加西亚·贝尔兰加[①]再拍一部电影的话，那恐怕是在电梯门前或电梯里的对话，人们可以谈的不只是天气好坏。

在另一个时间、另一个地点（20世纪的美国），两位物理学家乔治·伽莫夫和他的同事马文·斯特恩因为没有热恋中的公主，也没有可以让人说闲话的前会计师，他们在独自按电梯时，就专心观察了电梯从更高和（或）更低楼层到来的频率。

具体来说，伽莫夫的办公室在二层，他经常上楼与六层的斯特恩一起工作。他注意到，当他按电梯按钮时，大部分时间电梯都来自更高的楼层。这是怎么回事？人们在屋顶上安装了电梯，并让它从上至下运行吗？伽莫夫想，难道不是电梯大约一半时间从下面上来，一半时间从上面下来才更合乎逻辑吗？

但当他的朋友斯特恩下楼与伽莫夫一起工作或者向他借笔的时候，斯特恩也按了电梯按钮，并发现电梯大部分时间都是从下面上来的，很少从上面下来。这又是怎么回事？难道人们在地下室安装了电梯，并让它们从下至上运行吗？有一天，两人讨论了这个看似矛盾的事实，并得出结论说，电梯可能是在四层安装的，并分别上升和下降。是的，这是个笑话。他们是物理学家，不是那些媒体上随随便便得出结论的嘉宾。

不过这个事实不容置疑，如果在大楼一层按电梯按钮，电梯从上面下来的频率更高；反之，如果在最高层按电梯按钮，电梯则更有可能从下面上来。从概率的角度来看，这完全没有矛盾，尽管从直觉上看是这样。我们把直觉暂时放下，思考一下概率吧：如果我们假设电梯在建筑物内均匀上下移动，我们位于一座七层建筑（就像伽莫夫和斯特恩工作的那栋楼一样）的二层，那么，因为我们上面的楼层比下面多，所以在按电梯按钮的时候，电梯在更高楼层的概率大于在更低楼层的概率。反之亦然。

① 路易斯·加西亚·贝尔兰加（1921—2010），西班牙电影导演。——译者注

总而言之，在非大楼正中的楼层按电梯按钮时，认为从上（或从下）来的概率各 50%，就和认为因为明天要么下雨要么不下雨，所以下雨的概率必然是 50% 一样不严谨。好吧，这也是个笑话，我讲出来是防止某一天电视上有些嘉宾会这么说……说到笑话，我们的“电梯物理学家”之一伽莫夫也是科学界众所周知的一个轶事的主角。在我看来，他非常讨人喜欢。我给你讲讲这个故事吧，没准你哪天就想在电梯里讲呢。

伽莫夫是拉尔夫·阿尔菲的论文导师。他们共同发表过一篇天体物理学论文，他们认为，在宇宙大爆炸的时候，以一定比例产生了氦、氢和其他较重的金属。这篇文章与关于这一事实的现有理论相矛盾，但事实证明，它符合今天通行的理论。好玩的不是这个，但这一研究很激动人心，不是吗？由于这篇论文的作者是阿尔菲（Alpher）和伽莫夫（Gamow），他们的姓氏听起来有点像希腊字母表中的第一个字母“阿尔法”（α）和第三个字母“伽马”（γ），但中间缺了“贝塔”（β）来构成“阿尔法－贝塔－伽马”，因此，他们说服了另一位杰出的物理学家汉斯·贝特，把他的姓氏（Bethe）加进这篇他一个字也没写的论文里，只是为了“阿尔菲－贝特－伽莫夫”听起来像“阿尔法－贝塔－伽马”。这就是为什么虽然这篇文章的原名是《化学元素的起源》，却被称为“αβγ 论文”。

伽莫夫后来自己回忆说，由于他没能充分证明关于这些化学元素起源的假设，贝特一度认真考虑改姓扎卡赖亚斯（Zacharias）……好吧，你不能说我没给你等电梯时候的谈资了。我的楼层到了，我下啦。



49　那一晚在蒙特卡洛发生了什么？错误的信念和概率游戏

虽然计算在概率游戏中获奖的机会是一个简单的算术运算，但哪怕在今天，继续使用错误的标准来选择彩票数字的还是大有人在。

几天前，我到镇上的烟店买东西，发现一大早就有很多人排队，令我非常惊讶。我看看前面的顾客。我先是高兴地注意到他们中几乎没有人会买烟，然后，就在惊讶和一点点疲劳中，看着他们购买六合彩彩票。

在某一刻，我很有冲动想告诉他们碰对 6 个号码的可能性（是 1/13 983 816），劝他们不要把钱花在这里。我忍住没动。看到他们绝望的面孔，他们因失望而皱眉，脸色变得苍白，我明白西班牙政府不太可能帮到他们。我非常累，眼睛垂下来。但这让我难受，特别是当我听到“我已经玩了 3 年相同的数字，这次肯定能赢”或“不要给我连续的数字，从来赢不了”这样的论点时……唉，算了。

我给你讲个故事吧，告诉你蒙特卡洛赌场曾经发生了什么。那是 1913 年的夏天，在蒙特卡洛赌场的轮盘赌中，连续 15 次出现黑色。聚集的赌客开始押红色，因为该转运了。但是没有，在摩纳哥的这个夏日，黑色连续 26 次出现，这意味着赌场可以获得数百万法郎的利润，还有一大串因押红色而让自己显得无比愚蠢的赌客。

认为在出现许多次黑色后就该轮到红色，或是扔硬币连续几次正面就该出现反面，这种做法被称为“蒙特卡洛谬误”。是的，它是一个谬误，一种错误的信念。就像有人认为，如果一年中每天都买同一个数字的彩票，那么每一天都更接近大奖一样。

但事实不是这样的。我们来说说其中的道理。每次抽签、抛硬币或旋转轮盘时，猜中和（或）获胜的概率是相同的，因为每次抽签或抛掷都与前一次无关。当我们抛硬币时，每次正面朝上的概率都是 1/2。在我看来，让一些人产生蒙特卡洛谬误的原因在于，他们混淆了第三次抛出正面的概率与连续三次抛出正面的概率。不，它们不一样。

抛硬币时，你在第三次抛出正面的概率是 1/2。是的，就像第一次、第二次……第二十次。连续抛出 3 个正面的概率是第一次抛出正面的概

率 1/2，乘以第二次抛出正面的概率 1/2，再乘以第三次抛出正面的概率 1/2。也就是说，连续获得三个正面的概率是 1/8。我想正是出于这个原因，第三轮有人很想投注，因为他们认为得到这个结果的概率不多不少是 7/8。所以来吧！

我总结并重复一遍：在抛硬币时，抛出正面的概率是 1/2，不管扔多少次，永远如此；连续抛出 n 个正面的概率是 1 除以 2 的 n 次方。当然，前提是硬币没有被做过手脚。这就是为什么，如果有人连续抛 10 次硬币，10 次都抛出正面，接下来一次我还会押正面。为什么？因为连续扔出 10 次正面的概率是 1/1024，非－常－小。有什么东西让我怀疑这个硬币不太清白……

如果我们怀疑硬币不太均衡，想要公平的抽签，我们该怎么办？比如，我们使用 1 欧元的硬币，扔出正面的概率为 56%，比扔出反面的概率更大[①]。没问题，我们这样做：连续扔两次硬币，然后两个玩家在“正面、反面”（先正后反）和“反面、正面”（先反后正）之间挑一个。如果扔出“正面、正面”或“反面、反面”，玩家就再扔一次。但是，使用这种方法，无论硬币是否被做过手脚，“正面、反面”和“反面、正面”的概率都相同，而且所有人都应该同意这一点。

买彩票的另一个错误信念关于抽到的和没有抽到的数字。所有数字出现的概率都一样，这很容易解释。但是，不开玩笑，在今天，让彩票行，比如马德里著名的“玛诺丽塔夫人”彩票行前排起长队的谬误引起了我的注意。

让我们想一想，不管是在这一家买，还是在那一家买，你能够抓到“大胖子”的概率是一样的（几乎为 0）。那些著名的彩票行又是怎么回事呢？那是因为，它们卖掉了几乎全部（即使不是全部）彩票号码的十分之一。

① Debora MacKenzie, *Euro coin accused of unfair flipping, New Scientist*, 2002.1.4.

这就是这些商家如此有可能售出大奖的原因。但是，无论你在何处购买，你赢得大奖的概率都是 1/100 000。对博彩业来说，赢家是卖彩票的，特别是组织彩票的，而绝不是你我镇上那些退休老人。

彩票就是这个样子，就像我说的，它没什么可玩的。但可以肯定的是，所有彩票、抽奖，不管是哪一种，都是等概率的，也是公平的。令人担忧的是，不公平的抽签系统被发现用于分配入学、公共住房甚至就业机会。

这些是美国人约翰·艾伦·保罗斯所谓的“数盲”（缺乏数学基础知识或数学素养）带来的后果，这些后果尤为严重。相信我，尤其是在江湖医生或是在银行家面前，数盲比文盲更危险。

50　加密：斯诺登对战白宫

美国中央情报局和美国国家安全局前技术员使用素数生成的密钥以非对称加密技术进行秘密通信。



我觉得，一个人不管从事什么工作，都无可避免地会有点令人疲惫、烦躁的不便之处。对我来说，虽小却烦人的不便之一就是得不断回答“数学有啥用？”这个问题（有时提问者还插入一些粗俗的感叹词），我想对于大多数数学家来说也是这样。或者比方说：“你这么喜欢的那些素数都是啥？”第二个问题通常还伴随着一句对这些投身于高贵的数学艺术的人到底有多古怪的终极确认。

好吧，这回轮到斯诺登、美国国家安全局和他们的阴谋来“救”我们了。当他们的丑闻曝光时，报纸头版的例子就帮我们回答了这些问题：数学，特别是素数，是应用于加密消息的密码学的基础。

在谈到素数时，我们指的是那些大于 1 的自然数（数数用到的数）中只能被自身和 1 整除的数，比如 2 和 3，但 4 不是素数，因为它还可以被 2 整除（商中没有小数）。许多世纪以来，素数对数学家的吸引力是毋庸置疑的。古希腊的欧几里得发现了素数的美丽，并证明它们有无限多个。直到近来，人们又谈起弱哥德巴赫猜想的证明，确认了任何大于 5 的奇数都可以表示为 3 个素数的和。例如，$15 = 3 + 5 + 7$。

是的，这个猜想除了对数论十分重要之外，还可以让你试着把奇数分解成素数自娱自乐一下，或是娱乐他人。从这个意义上说，使用埃拉托斯特尼筛法计算小于给定自然数 N 的素数也很有趣。有意思还不要钱，要我说，值得一试哦。

有人会说：它们很好、很漂亮，但这些素数有什么用呢？前面提到过了，比如，素数可以用于加密消息、密码学，目的是保护通过电子邮件发送的信息。下面你就知道我在说什么了。

当时在西班牙报纸头条上，除了可以看到当地官员涉嫌腐败的丑闻之外，还可以跟踪斯诺登案。爱德华·斯诺登使用创建于 2004 年的 lavabit.com 邮件服务的账户 edsnowden@lavabit.com，作为比 Gmail 更安全的邮件加密替代方案来通信。

现在，我们的素数就出场了。Lavabit 用于确保其消息私密的加密机制之一是非对称密码，其中素数起了很大作用。你是否知道它们表现得很好？安全机构无法破译这些消息，自然，美国政府也不得不关闭这个安全的邮件服务。这也很正常……

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

不深入太多细节的话，我会说非对称密码的魅力在于，它运用了一对互为逆运算的数学运算，其中一个运算非常简单，而另一个非常复杂。例如，把两个素数相乘是一个非常简单的运算；然而，如果你给出一个数，我们知道它是两个素数的积，要给这个数分解因子，找出隐藏在其中的两个素数却是非常复杂的操作——复杂到哪怕用现有最强大的计算机也需要大量的计算时间。

如果我们有 999 809 和 404 081，两个数都是素数，求二者的乘积非常简单。但如果给的是 404 003 820 529，为了破译密钥需要将这个数字分解为两个素数的乘积的话，原则上我们需要尝试所有的素数，直到找到第一个能够整除它的数（在这里是 404 081）。

虽然计算机可以很快检查一个素数是否能够整除一个给定的数字，但我们必须尝试很多很多素数。因此这种暴力搜索要花很长很长时间。当然，在实践中，建议选择非常大的素数，让这个乘积也非常大（为了更加安全，建议这个积超过 600 位数字，而不是我们设定的 11 位数字）等，而这就更难分解了。

像这样的数字：

25195908475657893494027183240048398571429282126204032027
77713783604366202070759555626401852588078440691829064124951508218929855914917618450280848912007284499268739280728777673597141834727026189637501497182469116507761337985909570009733045974880842840179742910064245869181719511874612151517265463228221686998754918242243363725908514186546204357679842338718477444792073993423658482382428119816381501067481045166037730605620161967625613384414360383390441495263443219011465754445417842402092461651572335077870774981712577246796292638635637328991215483143816789988504044536402352738195137863656439121201039712282212072035

当然，这是个很粗略的说法。我们可以说，在非对称密码学中，如果我们知道某人选择的两个素数的乘积，我们就可以向他发送一条消息；但要解读它，就必须知道这两个素数是什么，而这是一件非常复杂的事情。

人名对照表

J. 施罗德 J. Schroeder
W. T. 赫布兰森 W. T. Herbranson
阿尔贝托 · 马克斯 Alberto Márquez
阿隆索 Alonso
阿曼西奥 · 奥尔特加 Amancio Ortega
埃里克 · 德曼 Erik Demaine
埃斯特万 · 莫罗 Esteban Moro
艾伦 · 韦斯曼 Alan Weisman
爱德华 · 弗伦克尔 Edward Frenkel
爱德华 · 斯诺登 Edward Snowden
爱德华特 · 彭塞特 Eduard Punset
安德鲁 · 贝弗里奇 Andrew Beveridge
安德鲁 · 怀尔斯 Andrew Wiles
安东尼奥 · 乌尔塔多 Antonio Hurtado
安娜 Ana
巴萨尼奥 Bassanio
保罗 · 米格罗姆 Paul Milgrom
鲍西娅 Portia
本图拉 Ventura
毕加索 Picasso
博卡德 · 波斯特 Burkard Polster
布拉斯 Blas
大卫 · 雷格拉 David Reguera
大卫 · 韦伯 David Webb
丹妮莉丝 · 坦格利安 Daenerys Targaryen
单杰 Jie Shan
蒂博 · 库尔图瓦 Thibaut Courtois
迭戈 · 科斯塔 Diego Costa
费兰 · 乌尔塔多 Ferran Hurtado
弗兰克 · 本福特 Frank Benford
弗朗西斯 · 高尔顿 Francis Galton
高德纳 Donald Knuth
高迪 Gaudí
哥伦布 Colomb
格劳乔 · 马克斯 Groucho Marx
格里戈里 · 佩雷尔曼 Grigori Perelman
哈里 · 贝克 Harry Beck
哈维 Xavi
哈维尔 · 洛佩兹 · 培尼亚 Javier López Peña
汉斯 · 贝特 Hans Bethe
赫尔曼 · 魏尔 Hermann Weyl
胡克 Hooker
卡尔 · 冯 · 林奈 Carl von Linné
卡尔 · 希尔霍尔策 Carl Hierholzer
卡丽熙 Khaleesi
卡罗琳 · 戈登 Carolyn Gordon
开普勒 Kepler
克里斯蒂娜 · 勒曼 Kristina Lerman
克里斯蒂亚诺 · 罗纳尔多 Christiano Rolando
拉尔夫 · 阿尔菲 Ralph Alpher
拉斐尔 · 罗宾逊 Raphael Robinson
拉蔻儿 Raquel
拉里 · 佩奇 Larry Page
莱昂哈德 · 欧拉 Leonhard Euler
理查德 · 费曼 Richard Feynman
利奥 · 莫赛 Leo Moser

路易斯·加西亚·贝尔兰加 Luis García Berlanga
罗伯特 Robert
罗伯特·伯杰 Robert Berger
罗杰·彭罗斯 Roger Penrose
马丁·德曼 Martin Demaine
马克·卡克 Mark Kac
马文·斯特恩 Marvin Stern
蒙提·霍尔 Monty Hall
莫里茨·科内利斯·埃舍尔 Maurits Cornelis Escher
尼古拉斯·凯奇 Nicolas Cage
聂鲁达 Neruda
欧几里得 Euclid
佩德罗·查孔 Pedro Chacón
皮埃尔·贝塞尔 Pierre Bézier
乔治·R. R. 马丁 George R. R. Martin
乔治·奥威尔 George Orwell
乔治·伽莫夫 George Gamow
琼恩·雪诺 Jon Snow
秋山仁 Jin Akiyama
塞德里克·维拉尼 Cédric Villani
塞万提斯 Cervantès
莎士比亚 Shakespeare
珊莎·史塔克 Sansa Stark
摄尔修斯 Celsius
史蒂夫·泽尔迪奇 Steve Zelditch
斯科特·沃尔珀特 Scott Wolpert
提利昂 Tyrion
外·哈特 Vi Hart
威廉·维克里 William Vickrey
西蒙·纽科姆 Simon Newcomb
谢尔盖·布林 Sergey Brin
亚伯兰·萨摩洛维奇·贝西科维奇 Abram Samoilovitch Besicovitch
伊戈尔·卡西利亚斯 Iker Casillas
伊涅斯塔 Iniesta
优安·曼努埃尔·色拉特 Joan Manuel Serrat
雨果·图谢特 Hugo Touchette
约翰·艾伦·保罗斯 John Allen Paulos
约翰·彼得·古斯塔夫·勒热纳·狄利克雷 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
约翰·冯·诺伊曼 John von Neumann
约翰·哈里森 John Harrison
约翰·哈默斯利 John Hammersley
约翰·米尔诺 John Milnor
约瑟夫·L. 戈维尔 Joseph L. Gerver
扎卡赖亚斯 Zacharias
詹妮弗·格尔贝克 Jennifer Golbeck



微信



回复“科普”和“数学”查看相关图书



微博

关注@图灵新知每日分享科普好书



更多好书

《玩不够的数学：算术与几何的妙趣》

《玩不够的数学2：当数学遇上游戏》

《最后的数学问题》

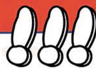
《不可思议的数》

《数学也荒唐：20个脑洞大开的数学趣题》

《数学万花筒》系列

封面设计：沐希设计





为什么一定要接种疫苗？

“自拍”也要讲究数学原理？

搬家时怎样让家具顺利通过走廊？

缝纫机和茶杯有什么关系？

《星球大战》《权力的游戏》《精灵宝可梦Go》也藏着数学秘密？

生活中处处都是数学：

代数、集合、图论、数论、贝叶斯定理……

放轻松，它们并不难。

带上你的好奇心，打开这本书，

幽默的笔触和有趣的插图将带你探索生活中的数学趣闻。

你一定会爱上数学！

ISBN 978-7-115-53966-3



定价：69.00 元

图灵社区：iTuring.cn

读者热线：(010) 51095183-600

分类建议 科普读物 / 数学

人民邮电出版社网址：www.ptpress.com.cn